

Zbornik del

KUHLJEVI DNEVI 2011

Mengeš,
22. september, 2011

Uredila:
Matjaž Eberlinc
Brane Širok



KUHLJEVI DNEVI 2011

Mengeš, 22. september, 2011

ZBORNİK DEL

Uredila:

Matjaž Eberlinc
Brane Širok

Recenzija:

Tom Bajcar
Miha Boltežar
Andrej Bombač
Matevž Dular
Marko Hočevar
Matjaž Hriberšek
Jože Korelc
Franc Kosel
George Mejak
Alen Orbanić
Miran Saje
Brane Širok
Leopold Škerget
Boris Štok

Izdalo in založilo:

Slovensko društvo za mehaniko
Jamova 2, Ljubljana
September, 2011

Oblikovanje naslovnice:

Monika Lovše

Tisk in vezava:

Grafika Bonifer d.o.o.

Naklada:

70 izvodov

Kazalo

Aerodinamične sile na rotorju z induciranim vzgonom krila diska, <i>R. Begovič, F. Kosel, V. Šajn</i>	1
Efektivnost mešanja z modificiranim dvostopenjskim mešalom, <i>A. Bombač, N. Zupančič, I. Žun</i>	9
Harmonsko vzbujanje dinamskega sistema ob sočasnem spremljanju modalnih parametrov v realnem času, <i>M. Česnik, J. Slavič, M. Boltežar</i>	17
Analiza porušitve pregrade po metodi SPH, <i>E. Džebo, D. Žagar, M. Četina, M. Jeromel, T. Bajcar, B. Širok, G. Petkovšek</i>	25
Eksperimentalno in numerično raziskovanje nestacionarnega tokovnega polja okoli osamljenega krila, <i>M. Fike, G. Bombek, A. Hribernik</i>	33
Odprava singularnosti interpolacijske matrike štirikotnega končnega elementa za tanke plošče, <i>R. Flajs, M. Saje</i>	41
Primerjava simulacije delovanja Darrieusove vodne turbine po postopku z modelom gibanja togega telesa in postopkom MFR, <i>M. Fleisinger, M. Zadravec, M. Vesenjāk, M. Hriberšek, K. Udovičič</i>	49
Numerična analiza vpliva gostote potencialnih razpok v zidakih na odziv zidu, <i>M. Gams</i>	57
Preizkuševališče za raziskave aeroelastičnih pojavov, <i>B. Gjerek, R. Dražumerič, F. Kosel</i>	67
Numerično modeliranje poladiabatnega poskusa, <i>A. Ilc, G. Turk, G. Trtnik</i>	75
Vpliv velikosti razpoke na faktor intenzitete napetosti v natezno obremenjeni plošči z izvrtino, <i>D. Jagarinec, N. Gubeljak, J. Predan</i>	83

Vpliv lege in uteži kontrolnih točk projektnega elementa pri optimizaciji topologije, <i>M. Kegl, B. Harl</i>	91
Prenosnost vibracij sistema dlan roka, pri vzbujujanju v Z in Y smeri, <i>L. Knez, J. Slavič, M. Boltežar</i>	97
Ločevanje magnetnih delcev iz suspenzij v viskoznem toku z uporabo Lagrange-Eulerjevega modela in metode robnih elementov BEM, <i>P. Kocutar, M. Hriberšek, J. Ravnik</i>	105
Geometrijska optimizacija uklona SMA palice zaradi ovirane povračljivosti, <i>J. Kunavar, F. Kosel, A. Pukšič, T. Videnič</i>	113
Primerjava določenega in predoločenega sistema v metodi robnih elementov s podobmočji, <i>J. Lupše, L. Škerget, J. Ravnik</i>	121
Oblikovanje aerodinamskega aktuatorja za ciljno pršenje v trajnih nasadih in merjenje tokovnih parametrov, <i>A. Malneršič, M. Hočevar, T. Godeša, B. Širok, A. Osterman</i>	129
Večnivojska metoda končnih elementov za naloge z enostranskimi robnimi pogoji, <i>G. Mejak</i>	137
Mehanizem generiranja vrtničnih struktur obtekanja kaskade valjev, <i>M. Milavec, B. Širok, M. Hočevar, M. Eberlinc</i>	145
Teoretična in računalniška analiza aerodinamičnih razmer v predoru, <i>J. Modic</i>	153
Raziskava tokovnih razmer na bočnem prelivu z uporabo vizualizacijske metode, <i>G. Novak, F. Steinman, T. Bajcar</i>	163
Numerična simulacija odcepitev toka v nadzvočni konični šobi pri majhnih tlačnih razmerjih šobe, <i>D. Nožak, T. Kosel, F. Kosel</i>	171
Samodejno spreminjanje računske mreže na primeru toka fluida preko stopnice, <i>I. Petrović, V. Šajn, F. Kosel</i>	179
Geometrijska optimizacija vitke konzole glede na problem bočne stabilnosti, <i>M. Polajnar, R. Dražumerič, F. Kosel</i>	187
Nadzor toka s plazmo pri profilu vetrne turbine, <i>E. Potočar, M. Eberlinc, B. Širok</i>	195
Raziskave dinamike kaotičnih sistemov z uporabo večstopenjske homotopsko perturbacijske metode, <i>R. Pušenjak, M. Oblak</i>	203

Numerična analiza zgorevanja KOEL v mali kurilni napravi, <i>B. Rajh, M. Zadavec, N. Samec, M. Hriberšek</i>	211
Simulacija ogrevanja in prezračevanja bazena z računsko dinamiko tekočin, <i>M. Ramšak, M. Čontala</i>	219
Eksperimentalna modalna analiza majhnih in lahkih struktur, <i>D. Rovšček, J. Slavič, M. Boltežar</i>	227
Vpliv zračnosti v ležaju na horizontalno togost valjčnih ležajev in dinamične karakteristike rotorjev, <i>Z. Savšek</i>	235
Statična stabilnost nelinearno elastičnega Eulerjevega nosilca, <i>M. Sitar, M. Brojan, F. Kosel</i>	243
Teoretična optimizacija letalskih propelerjev, <i>J. Sodja, D. Stadler, T. Kosel</i>	251
Optimization of Powder Injection Moulding Binder through Bimodality and Ad- dition of Short Molecular Chain Components, <i>G. Stringari, J. Gonzalez-Gutierrez, B. Zupančič, G. Kubyshkina, B. von Bernstorff, I. Emri</i>	259
Numerična simulacija toka tekočine v kanalu z določitvijo polja adsorpcijskega ravnotežja na njegovih stenah, <i>T. Štivec, M. Hriberšek, S. Bašič, J. Ravnik</i>	267
Optimiranje hitrosti planiranja preleta jadralnega letala, <i>T. Trojner, F. Kosel, V. Šajn</i>	275
Modeliranje razlitja nafte v morskem okolju, <i>D. Žagar, M. Ličer, V. Malačič</i>	283



Aerodinamične sile na rotorju z induciranim vzgonom krila diska

R. Begović¹, F. Kosel² in V. Šajn³

Aerodynamical forces on rotor with induced wing disc lift

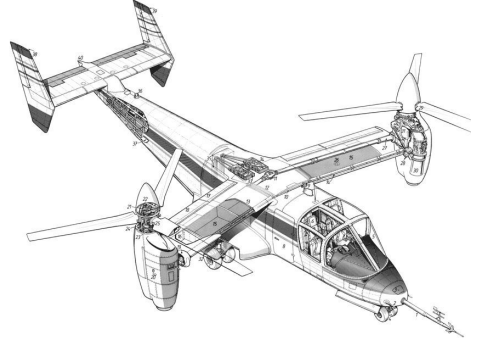
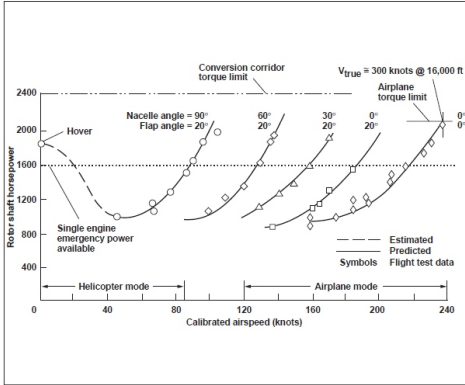
Povzetek. Za letala z rotorji, ki lahko vertikalno vzletijo in pristanejo je ugotovljeno, da se potreba po pogonski moči zmanjša, ko letalo pridobiva na horizontalni hitrosti, kljub dodatnim izgubam zaradi gibanja plovila skozi zrak. Z uporabo osnovne teorije homogenega vzgonskega diska ni možno pojasniti ta pojav. V predstavljenem delu je podana nadgradnja teorije homogenega vzgonskega diska z uporabo inducirane vzgona krila diska. Z uporabo teorije inducirane vzgona krila diska je izračunan prehod iz lebdenja v horizontalen let letala z nagibnimi rotorji NASA XV-15. Izračunan čas potreben za prehod odstopa od izmerjenega 9 %.

Abstract. For aircraft with rotors, which are capable of vertical takeoff and landing, it was found that required power is reduced with increasing horizontal speed, despite the additional losses due to the movement of the vessel through the air. Using the theory of homogeneous lifting disk it is not possible to explain this phenomenon. In the present work the upgrade theory of homogeneous disk lift with using of the induced wing lift is presented. With the use of induced wing lift theory, calculations of transition from hovering to horizontal flight were made for experimental aircraft with tilt rotors NASA XV-15. Calculated time for transition deviated from measured 9 %.

1 Uvod

Potreba po letalih neodvisnih od dragih, preobremenjenih in občutljivih letaliških stez ter slaba končna hitrost in dolet klasičnih helikopterjev je pripeljala do razvoja VTOL letal z vertikalnim vzletom in pristankom ("Vertical Take Off and Landing"). Razvoj je najbolj napredoval pri VTOL letalih z nagibnimi rotorji [1, 2]. Prvo operativno VTOL letalo z nagibnim rotorjem je bilo eksperimentalno letalo NASA XV-15 [3] na sliki 1b. XV-15 ima par rotorjev, ki sta na obeh koncih fiksne krila ter se lahko nagibata v smeri leta. Prehod iz lebdenja v horizontalni let se izvede tako da se nagibni kot rotorjev glede na horizontalo zmanjšuje, letalo pa pridobiva na hitrosti. Pri horizontalnem letu prevzamejo rotorji funkcijo propelerja, krila pa zagotavljajo vzgon. VTOL letalo z nagibnimi rotorji doseže bistveno večjo hitrost kot helikopter in ima značilno večji dolet.

^{1,2,3}Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo



Slika 1 : a) Prikaz potrebne moči glede na hitrost in nagibni kot rotorjev letala XV-15 [2], b) letalo XV-15.

Prehod iz lebdenja v horizontalen let je aerodinamični pojav, ki poteka v prostoru in času. Pri tranziciji se srečujemo s poševnim obtekanjem toka zraka skozi disk rotorja pri različnih kotih in z interakcijo rotorja s krilom letala. Ob tem upoštevamo dinamiko gibanje letala, ki je posledica rezultirajočih aerodinamičnih sil. V prispevku so analizirane aerodinamične sile, ki delujejo na VTOL letalo z nagibnimi rotorji ob poševnem obtekanju toka zraka skozi disk ter je podana nadgradnja teorije diska z induciranim vzgonom krila diska. Izveden je izračun optimalnega prehoda iz lebdenja v horizontalen let letala z nagibnim rotorjem NASA XV-15.

2 Teoretične osnove

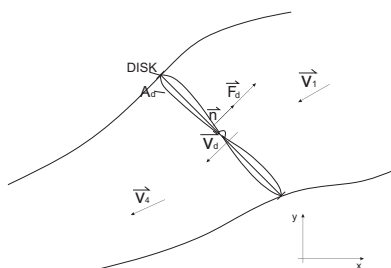
2.1 Teorija vzgonskega diska rotorja

Privzamemo da je vzgonska sila enakomerno porazdeljena po površini-disku, ki jo tvorijo lopatice rotorja ob svojem vrtenju. Sila vzgonskega diska nastane zaradi spremembe gibalne količine toka fluida skozi disk povzročene z gibanjem lopatic rotorja. V primeru, da ima letalo komponento horizontalnega gibanja lahko dobimo primer poševnega obtekanja toka zraka skozi vzgonski disk, kot je predstavljeno na sliki 2. \vec{v}_1 je hitrost daleč stran pred diskom, v_d hitrost skozi disk, \vec{v}_4 hitrost daleč stran za diskom, A_d površina diska in F_d vzgonska sila diska [4]. Po izreku o gibalni količini zapišemo aerodinamično silo \vec{F}_d in pretok \dot{m}

$$\vec{F}_d = \dot{m}(\vec{v}_4 - \vec{v}_1), \quad \dot{m} = \rho A_d \vec{v}_d \vec{n}, \quad (1)$$

kjer je ρ gostota nestisljivega fluida in \vec{n} vektor normale diska. Dovedeno moč pa lahko izračunamo z razliko specifične kinetične energije masnih pretokov in odvoda opravljenega dela nad tokom fluida:

$$P_d = -\frac{1}{2} \dot{m}(v_4^2 - v_1^2), \quad P_d = -\vec{F}_d \vec{v}_d. \quad (2)$$



Slika 2 : Hitrostno polje v toku fluida skozi disk rotorja

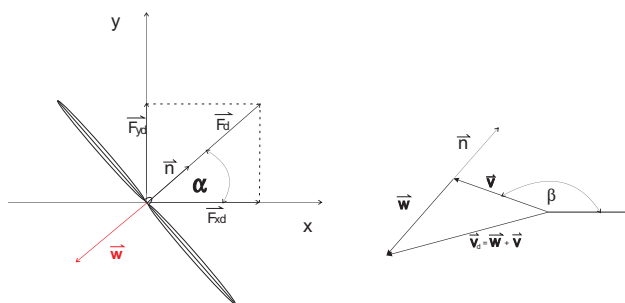
Z reševanjem enačb 1 in 2 dobimo da je hitrost na disku enaka srednji vrednosti vektorjev hitrosti \vec{v}_1 in \vec{v}_4 . Vpeljemo inducirano hitrost \vec{w} [5]

$$\vec{w} = -w\vec{n} = \frac{1}{2}(\vec{v}_4 - \vec{v}_1). \quad (3)$$

Z uporabo inducirane hitrosti, enačbi 1 in 2 izračunamo silo in dovedeno moč na disku

$$\vec{F}_d = \rho A_d [(\vec{v}_1 + \vec{w})\vec{n}] \cdot 2\vec{w}, \quad P_d = -\frac{1}{2}\rho A_d [(\vec{v}_1 + \vec{w})\vec{n}] [|\vec{v}_1 + 2\vec{w}|^2 - |\vec{v}_1|^2]. \quad (4)$$

Vektorske veličine, ki nastopajo v enačbah so predstavljene na sliki 3, kjer je α kot nagiba rotorja, \vec{v} vektor hitrost vetra, če opazujemo iz zornega kota letala, in β kot, ki ga oklepata horizontalna os in vektor hitrosti fluida.



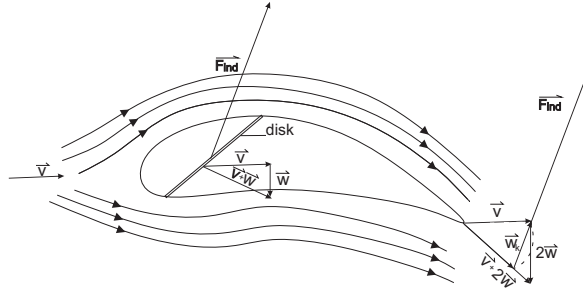
Slika 3 : a) Sile na disku, b) Hitrosti na disku.

Za praktične izračune lahko zapišemo enačbi 4 s koti α in β

$$\vec{F}_d = -\rho A_d (v \cos(\alpha - \beta) - w) [\cos\alpha, \sin\alpha], \quad P_d = 2w\rho A_d (v \cos(\alpha - \beta) - w)^2. \quad (5)$$

2.2 Inducirana sila krila diska

Pri poševnem obtekanju skozi disk se okoli vzgonskega diska ustvari obtekanje fluida, ki sledi spremembi smeri vektorja hitrosti toka zraka skozi disk, vendar ob tem ne spremeni velikost hitrosti, kot je prikazano na sliki 4.

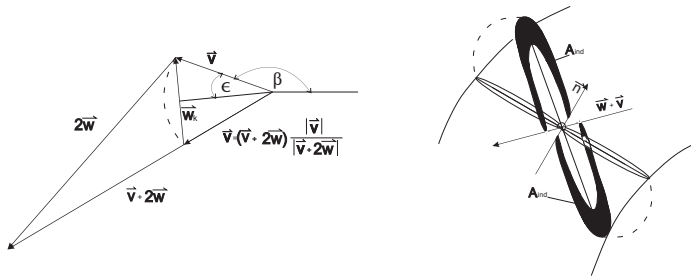


Slika 4 : Učinek krila, ki se ustvari okoli rotirajočega diska.

Z uporabo teorije vzgona krila z eliptično porazdelitvijo vzgona [6] lahko predpostavimo, da vzgonski disk ustvari tudi silo vzgona po principu podobnem delovanju letalskega krila. Tako je celoten vzgon diska sestavljen iz potiska vzgonskega diska in inducirane vzgona, ki ga tvori krilo diska. Inducirano silo krila diska \vec{F}_{ind} dobimo

$$\vec{F}_{ind} = \dot{m}_k \cdot \vec{w}_k, \quad (6)$$

kjer je \dot{m}_k inducirani masni pretok krila diska po teoriji vzgonskega krila in \vec{w}_k pasivna komponenta inducirane hitrosti diska.



Slika 5 : Predstavitev a) Vektorji hitrosti za diskom, b) Prečni prerez, na katerem se ustvarja inducirani vzgon.

Medsebojno razmerje med vektorji in koti je predstavljeno na sliki 5a. Kot ϵ predstavlja polovični kot, ki ga oklepata vektorja hitrosti pred diskom in za njim. Pasivno komponento inducirane hitrosti diska \vec{w}_k dobimo kot razliko vektorja hitrosti fluida in vektorja enake velikosti

zarotiranega v smeri vektorja hitrosti daleč stran od diska oziroma v vektorskem zapisu

$$\vec{w}_k = (\vec{v} + 2\vec{w}) \cdot \frac{|\vec{v}|}{|\vec{v} + 2\vec{w}|} - \vec{v}, \quad (7)$$

Po teoriji inducirane vzgona krila za majhen polovični inducirani kot ϵ , je inducirana ploskev A_{ind} , skozi katero teče inducirani masni tok fluida, omejena s krogom premera razpetine krila [6]. V našem primeru je razpetina krila enaka premeru kroga diska. Za upoštevanje vpliva velikega polovičnega inducirane kota diska smo inducirano ploskev zasukali za kot ϵ glede na vektor hitrosti pred diskom. Skozi del inducirane ploskve teče tok, ki teče tudi skozi vzgonski disk, in kot tak ne more predstavljati inducirani masni tok, zato le tega izločimo iz velikosti inducirane ploskve kot je predstavljeno na sliki na sliki 5b. Velikost inducirane ploskve je

$$A_{ind} = \left(1 - \frac{(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{n}}{|\vec{v} + \vec{w}|}\right) A_d. \quad (8)$$

Z uporabo enačb 4, 6, 7 in 8 zapišemo inducirano silo krila diska

$$\vec{F}_{ind} = \rho \left[1 - \frac{(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{n}}{|\vec{v} + \vec{w}|} \right] A_d \cdot [(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{n}] \cdot \left[(\vec{v} + 2\vec{w}) \cdot \frac{|\vec{v}|}{|\vec{v} + 2\vec{w}|} - \vec{v} \right], \quad (9)$$

oziroma s koti α in β

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ind} = - \rho \cdot & \left[1 + \frac{v \cos(\alpha - \beta) - w}{\sqrt{v^2 + w^2 - 2vw \cos(\alpha - \beta)}} \right] A_d (v \cos(\alpha - \beta) - w) \cdot \\ & \cdot \left[\frac{(v \cos \beta, \sin \beta) - 2w(\cos \alpha, \sin \alpha)}{\sqrt{v^2 + 4w^2 - 4vw \cos(\alpha - \beta)}} - v(\cos \beta, \sin \beta) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

3 Izračun problema

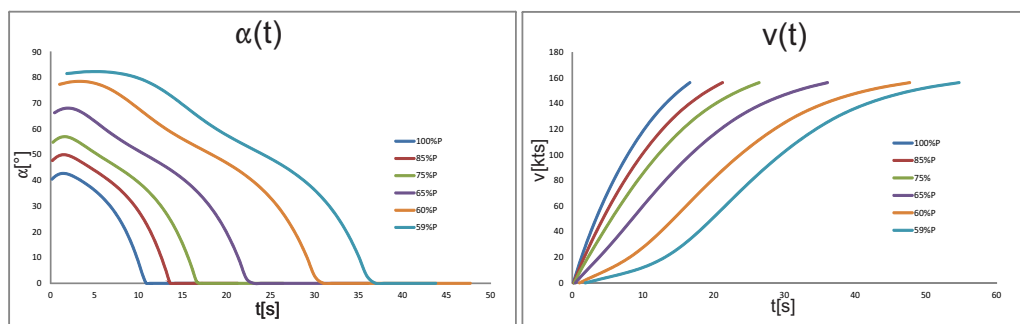
Program za izračun prehoda iz lebdenja v horizontalni let smo izdelali v programskem okolju MATLAB. Za dano hitrost horizontalnega premočrtnega leta program poišče optimalen nagibni kot rotorja za doseg največjega pospeška ob dani moči. Ob zahtevi da letalo ohranja višino zapišemo ravnotežje sil

$$\sum_i F_{ix} = ma_x, \quad \sum_i F_{iy} = mg. \quad (11)$$

Izračun prehoda izvedemo z inkrementalnim večanjem hitrosti letala do 10% večje od minimalne potrebne za horizontalen let ob sočasnem iskanju optimalnega nagibnega kota rotorja. V vsakem hitrostnem prirastku izračunamo časovni prirastek in prirastek opravljene poti letala.

$$\Delta t_v = \frac{v}{\max(a_x(v))}, \quad \Delta s_v = v \cdot \Delta t_v + \frac{\max(a_x(v)) \cdot \Delta t_v^2}{2}. \quad (12)$$

Problem optimalnega kota nagiba in inducirane hitrosti rešujemo z dvoparametrično Newtonovo metodo, pri kateri smo zaradi numerične nestabilnosti dodali algoritem numerične relaksacije. Izvedli smo izračun prehoda iz lebdenja v horizontalni let za eksperimentalno letalo VTOL XV-15 s turbinskimi motorji, slika 1b, kjer smo rezultate primerjali z grafom na sliki 1a [2] in časom prehoda XV-15, ki smo ga izmerili na video posnetku [7]. Poglavitni podatki, ki smo jih potrebovali za izračun so: $m = 6000 \text{ kg}$, $d = 7,62 \text{ m}$, $A_k = 15,7 \text{ m}^2$, $P_n(\text{nazivna}) = 2 \cdot 1550 \text{ HP}$, $P_m(v \text{ sili}) = 2 \cdot 1850 \text{ HP}$. Pri vseh grafih imamo prikazane različne razpoložljive moči, od polne moči $100 \% P_n$ (za normalen vzlet) do moči, ki jo po naših izračunih letalo nujno potrebuje za lebdenje $59 \% P_n$ kar se dobro ujema z odčitanim rezultatom na grafu 1a saj je odstopanje med izračunano in očitano vrednostjo pod 3%. Na grafu vidimo tudi, da lebdenje brez talnega učinka z enim motorje ni mogoče, kar se ujema z našimi izračuni.

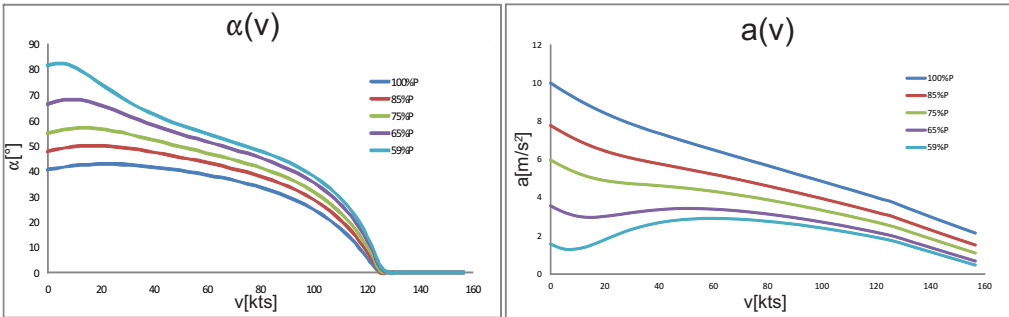


Slika 6 : a) Izračunan nagibni kot rotorja v odvisnosti od časa, b) Izračunana hitrost v odvisnosti od časa

Na sliki 6a je prikazan graf nagibnega kota rotorja α v odvisnosti od časa t . Pri nazivni moči motorja je potrebno 11 s za doseg hitrosti pri kateri so rotorji lahko usmerjeni v smeri leta. Izračunani čas smo primerjali z izmerjenim časom potrebnim za prehod 12 s, ki je bil podan na video posnetku ter z naše strani tudi potrjen z meritvami video posnetka prehoda letala NASA XV-15 [7]. Odstopanje med izračunanimi in izmerjenimi rezultati znaša 9%. Za varen prehod med helikopterskim in letalskim načinom letenja, kar upošteva tudi čas, ko so rotorji usmerjeni v smeri leta potrebuje letalo pri nazivni moči 17 s, kar je razvidno iz grafa 6b. Podaljšani čas je posledica zahteve da letalo doseže 10% večjo hitrost od minimalne. Pri minimalni moči, ki jo nujno potrebujemo za izvedbo varnega prehoda se čas poveča za 38 s. Pri grafu 6a je zelo zanimivo videti koliko vpliva povečanje moči, ki je nujno potrebna že za samo 1 %. Saj se čas varnega prehoda skrajša za 7 s. Tako vidimo, da se letalo pri 59 % P_m bori za svoj obstoj v zraku in mu vsak % moči olajša prehod.

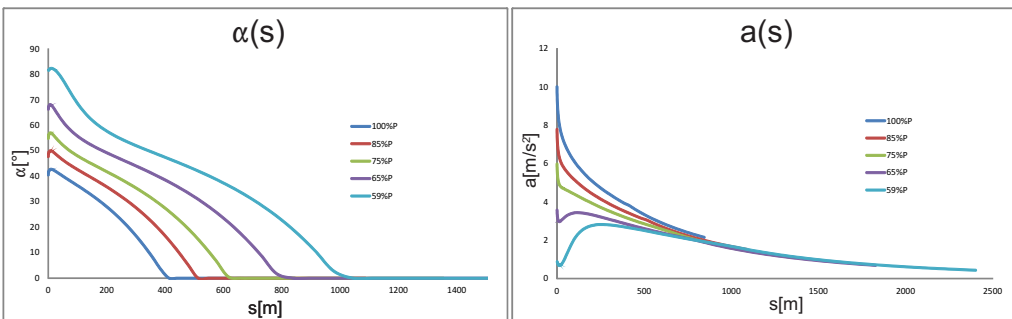
Na sliki 7 sta prikazana grafa nagibnega kota rotorja α in pospeška a v odvisnosti od hitrosti v in poti s . Graf 7a nam pove, do katere meje lahko potisnemo nagibne rotorje naprej pri dani hitrosti in dani moči, da še vedno ohranjamo isto višino. Če potisnemo rotorje naprej več kot je dovoljeno, vertikalna komponenta sile diska ni dovolj velika, da bi obdržala letalo v zraku, krilo pa ne tvori dovolj velikega vzgona zaradi premajhne hitrosti. Zato se zlomi vzgon in letalo lahko pade v vrt. Pri nazivni moči lahko letalo nagne rotorje do $40,5^\circ$ že na začetku in

pri tem proizvaja zadostno vertikalno komponento, da ohranja višino, ima pa tudi horizontalno komponento zaradi katere letalo pospešuje, kot lahko vidimo na sliki 7a. Pri moči 59 %, ki jo nujno potrebuje za letenje, lahko kot spustimo le do $81,5^\circ$, nato letalo počasi nabira hitrost in rotorje lahko spuščamo nižje.



Slika 7 : Izračunan nagibni kot rotorja v odvisnosti od hitrosti, b) Izračunan pospešek v odvisnosti od hitrosti

Pri hitrosti od 125 *kts* do 128 *kts* lahko rotorje spustimo do kota 0°, vendar to še ni varna hitrost za letenje, saj inducirana hitrost skozi disk propelerja poveča hitrost na krilu in s tem tudi velikost vzgona krila. Varna hitrost je po našem izračunu 156 *kts*, ta pa se sklada s hitrostjo, ki jo lahko odčitamo iz grafa na sliki 1a. Na grafu 7b je predstavljen pospešek letala v odvisnosti od hitrosti. Pri najmanjši moči je jasno razviden učinek teorije inducirane vzgona krila diska. Pospešek letala narašča v območju od 9 *kts* do 61 *kts*. Zaradi inducirane vzgona se lahko del moči preusmeri v pospešek. Enak učinek vidimo tudi na grafu 1a, vendar le ta popisuje let s horizontalno hitrostjo.



Slika 8 : a) Izračunan nagibni kot rotorja v odvisnosti od poti, b) Izračunan pospešek v odvisnosti od poti

Na sliki 8 sta prikazana grafa nagibnega kota α in pospeška a v odvisnosti od poti v . Pri večji moči je pospešek največji na začetku in nato upada. Pri 100 % moči je pospešek zelo velik kar $10.2m/s^2$, kar se ujema z izjavami pilotov letala [3]. Ko letalu odvzemamo moč pod 75 %,

graf 8b je ponovno viden učinek teorije inducirane vzgona. Pospešek je na začetku višji, nato upade in ko dobimo začetno hitrost, zopet naraste, saj se zaradi obtekanja zraka okoli rotorja ustvari navidezno krilo, ki proizvaja dodaten vzgon in tako imamo dovolj moči, da ohranjamo višino in pospešujemo s še večjim pospeškom. Z povečevanjem hitrosti nato pospešek spet upade.

4 Sklep

V prispevku smo predstavili teorijo inducirane vzgona krila diska. Tok zraka, zaradi horizontalnega leta tudi obteka disk, zato se okoli njega ustvari navidezno krilo, ki ustvarja inducirani vzgon. Tok zraka, ki gre skozi rotor, spremeni smer okrog diska obtekajočega zraka. Vse aerodinamične sile se spreminjajo s hitrostjo letala in z nagibnim kotom rotorja. Na osnovi enačb smo izpeljali algoritem, pri katerem je bilo treba upoštevati, da smo imeli sistem enačb z dvema neznankama. Pri določeni hitrosti letala smo morali ugotoviti nagibni kot rotorja, pri katerem se porabi celotna razpoložljiva moč. Del te moči se uporablja za vzdrževanje konstantne višine pri prehodu, ostanek te moči pa za pospeševanje letala. Za izračun preostalih elementov je bilo treba izračunati inducirano hitrost, ki je druga neznanka. Te smo izračunali numerično z Newtonovo metodo, nagibne kote rotorja pa z nadgrajeno Newtonovo metodo. Nato smo izračunali vse sile, iz njih pa dobili pospešek, opravljeno pot in čas prehoda.

Predstavljeno teorijo inducirane vzgona krila diska smo verificirali z izračuni prehoda VTOL letal NASA XV-15 iz lebdenja v horizontalen let. Odstopanje med izračunanimi in izmerjenimi rezultati je 9%. Pri izračunu smo upoštevali tudi vpliv diska na krilo letala, vendar je model preprost, saj pri lebdenju letal upošteva zmanjšanje velikosti diska, pri horizontalnem letu pa kot ϵ . Z nadgradnjo modela aerodinamičnih sil na krilu bi lahko dobili bolj natančne rezultate izračuna.

Literatura

- [1] J. P. Campbello, *Vertical Takeoff & Landing Aircraft*, The MacMillan Company, New York, 1962.
- [2] David D. Few, *A Perspective on 15 Years of Proof-of-Concept Aircraft Development and Flight Research*, Ames Research Center Moffett Field, California, 1987.
- [3] M. D. Maisel, D. J. Giulianetti and D. C. Dugan, *The History of the XV-15 Tilt Rotor Research Aircraft*, NASA, Washington, D.C., 2000.
- [4] A. R. S. Bramwell, George Done, David Balmford, *Bramwell's Helicopter Dynamics*, Butterworth-Heinemann, 2001.
- [5] W. Johnson, *Helicopter theory*, Dover Publications, New York, D.C., 1980.
- [6] E. Torenbeek, H. Wittenberg, *Flight Physics*, Springer Verlag, Dordrecht 2009.
- [7] http://www.youtube.com/watch?v=_V4Ekh3TBA0.



Efektivnost mešanja z modificiranim dvostopenjskim mešalom

A. Bombač, N. Zupančič in I. Žun

Povzetek. V delu je predstavljena eksperimentalna študija učinkovitost dvostopenjskega mešala, ki je sestavljeno iz standardnega turbinskega mešala (RuT) in mešala z zapognjenimi lopaticami (TBT). Predstavljene so štiri različne konfiguracije dvostopenjskega mešala. Iz meritev na eksperimentalni napravi izhaja, da je mešalo pri mešanju kapljevine najučinkovitejše pri konfiguraciji zgornje/spodnje mešalo v izvedbi TBT/RuT, kjer je dosežena najmanjša moč mešanja in najkrajši čas pomešanja (konfiguracija C z manjšo razdaljo med mešali). Na splošno se časi pomešanja krajšajo z večanjem vrtilne frekvence tudi pri dvostopenjskem mešalu.

Abstract. This paper presents an experimental study of the two-stage impeller efficiency by mixing of liquid. The impeller was assembled of a standard Rushton turbine (RuT) and a stirrer with twisted blades (TBT). Four different configurations of two-stage impeller are presented. From the measurements at experimental device it can be seen that the most efficient configuration is attained by combination upper/lower stirrer as TBT/RuT, respectively, where minimum power dissipation and mixing times are achieved (configuration C with shorter clearance between the stirrers). In general, mixing time decreases with increasing impeller speed.

1. Uvod

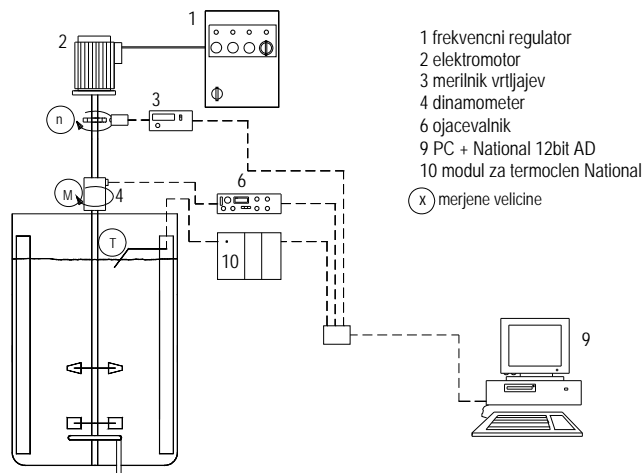
Pri dispergiranju plinov v kapljevine v vitkih reaktorjih je najpogosteje uporabljeno večstopenjsko mešalo. Tak sklop lahko tvorijo enaka mešala ali pa mešala različnih izvedb. Izbira mešala pri izbrani geometrijski konfiguraciji mešalne posode je ključnega pomena za optimalno izvedbo tehnološkega procesa, ki jo pogojujejo osnovne karakteristike mešala, kot sta npr. moč mešala in čas pomešanja. Pri vitkih reaktorjih se za mešanje kapljev in običajno uporablja večstopenjska mešala, kjer geometrijska konfiguracija celotnega sklopa močno pogojuje različne tokovne strukture. Poznavanje disipacije energije mešala in časa pomešanja je osnovnega pomena pri raziskavah mešanja v mešalnih sistemih. Ti karakteristiki namreč odločilno vplivata na učinkovitost mešalnega sistema, odločata pa tudi o ceni mešalnega procesa. Čas pomešanja je eden od osnovnih kriterijev za določanje učinkovitosti mešal, torej če je pri enakem vnosu energije za izbrano mešalo čas pomešanja krajši, je učinkovitost tega mešala večja [8].

V tem delu je predstavljena analiza porabe energije pri mešanju kapljevine v vitki posodi z dvostopenjskim mešalom, sestavljenem iz standardnega Rushtonovega mešala (RuT) in mešala z zapognjenimi lopaticami (TBT), razvitega in patentiranega v LFDT, ob štirih različnih geometrijskih konfiguracijah. Izvedene so bile meritve moči dvostopenjskega mešala. Preizkus je bil opravljen pri različnih vrtilnih frekvencah mešala, moč mešala je prikazana v brez dimenzijski obliki z Newtonovim številom, vrtilne frekvence mešala pa z Reynoldsovim številom značilnim za naprave industrijskih velikosti. Časi pomešanja so bili izmerjeni za 4 konfiguracije (A, B, C in D) pri različnih frekvencah mešala v enofaznem

sistemu. Časi pomešanja so bili merjeni po metodi motnja-odziv, kjer je bila za motnjo uporabljena manjša količina vlite vroče vode v kapljevino, njen odziv pa je bila sprememba temperature na izbrani lokaciji v kapljevini. Za delovno sredstvo je bila uporabljena voda.

2. Merilna linija in preizkus

Meritve moči dvostopenjskega mešala so potekale v pokončni cilindrični posodi notranjega premera $T=450\text{mm}$ z zaobljenimi robovi in ravnim dnom. V posodi, narejeni iz pleksi stekla, so bili osno-simetrično nameščeni motilniki toka. Shematski prikaz in podrobnejši opis naprav v merilni liniji, ki je prikazana na sliki 1 ter točnost izmerjenih vrednosti, ponovljivost meritev, itn. so podani v delih [1,2,3,6].



Slika 1: Merilna linija

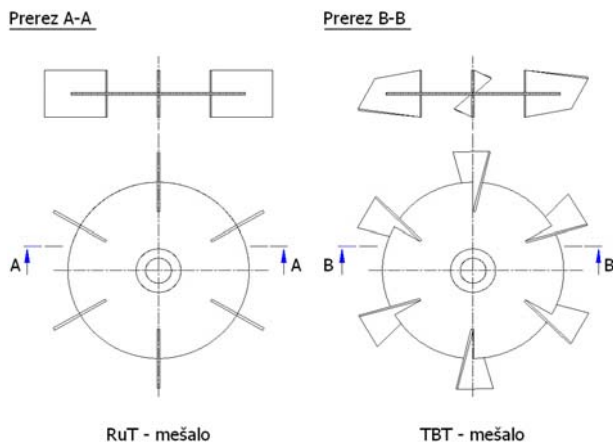
Za delovno kapljevino je bila uporabljena vodovodna voda pri sobni temperaturi. Dvostopenjsko mešalo je bilo sestavljeno iz RuT in TBT mešala, ki sta prikazani na sliki 2. Dvostopenjsko mešalo je bilo sestavljeno pri dveh razdaljah med mešali in izmenično kot zgornje/spodnje mešalo, kot je prikazano s kombinacijami v tabeli 1.

Tabela 1: Geometrijske konfiguracije posode z mešali

Konfiguracija	Zgornje mešalo	Spodnje mešalo	H [mm]	C_2 [mm]	C_1 [mm]	T [mm]	D [mm]
A	TBT	RuT	750	300	150	450	150
B	RuT	TBT	750	300	150	450	150
C	TBT	RuT	650	200	150	450	150
D	RuT	TBT	650	200	150	450	150

Glede na razdaljo med mešali se je spreminjala tudi višina vode v posodi, ki je bila vedno za višino ($^{2/3}T$) nad zgornjim mešalom. Temperatura vode je bila izmerjena s termoclenom *NiCr-Ni* podprtim z elektronskim sklopom GTH 1200A. Najprej je bil izmerjen časovno-temperaturni odziv pri potopitvi sonde v vročo vodo ($T \approx 95^\circ\text{C}$). Čas merjenja je trajal 6 sekund. Frekvenca vzorčenja je bila 500Hz. Odzivnost digitalnega termometra (kot celotnega sklopa) je bila izmerjena desetkrat, povprečna odzivnost merilnika je znašala $0,002436 \text{ s}/^\circ\text{C}$ oziroma 445°C/s . S tako umerjenim elektronskim termometrom smo nadaljevali meritve

časov pomešanja različnih konfiguracij. Čas pomešanja je bil izmerjen z metodo motnja-odziv.

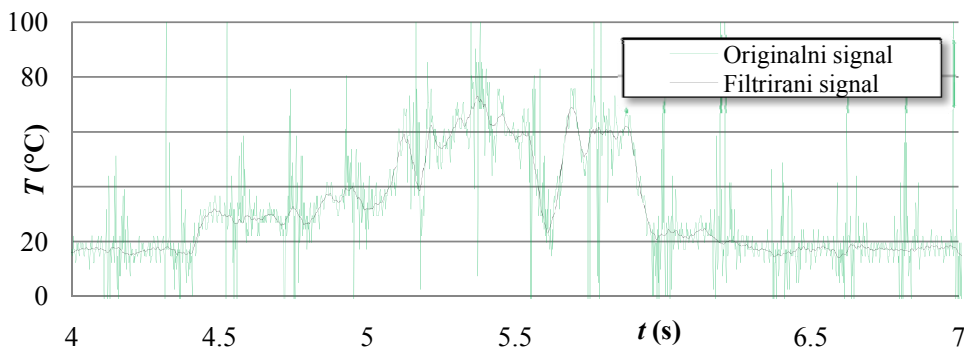


Slika 2: Standardno RuT mešalo in modificirano TBT mešalo [7].

Kot motnja je bila uporabljena vroča voda ($\approx 95^\circ\text{C}$; 2 litra). Osnovni signal merjenih časov pomešanja je bil zaradi narave šuma filtriran desetkrat zapored po enakem postopku, kar ni ogrozilo verodostojnosti podatkov. Če se je vrednost T_i (temperatura v odvisnosti od časa) razlikovala za 1% od vrednosti ene izmed sosednjih dveh vrednosti, potem je bila nadomeščena s povprečjem teh dveh sosednjih vrednosti, kot je razvidno iz kriterija (1). Dokončno je bil signal očiščen šuma še s kriterijem (2).

$$(T_i > T_{i-1} * 0,99 \wedge T_i > T_{i-1} * 1,01) \vee (T_i < T_{i+1} * 0,99 \wedge T_i > T_{i+1} * 1,01) \Rightarrow T_i = \frac{T_{i-1} + T_{i+1}}{2} \quad (1)$$

$$T_i = \frac{T_{i-9} + \dots + T_{i+10}}{20} \quad (2)$$



Slika 3: Primerjava originalnega in filtriranega signala.

Začetni in končni čas odziva sta bila določena pri pogoju, ko je T_{iz} oziroma T_{ik} za 1% večji oziroma manjši kot povprečje 90-ih zapisov pred oziroma po T_{iz} oz. T_{ik} .

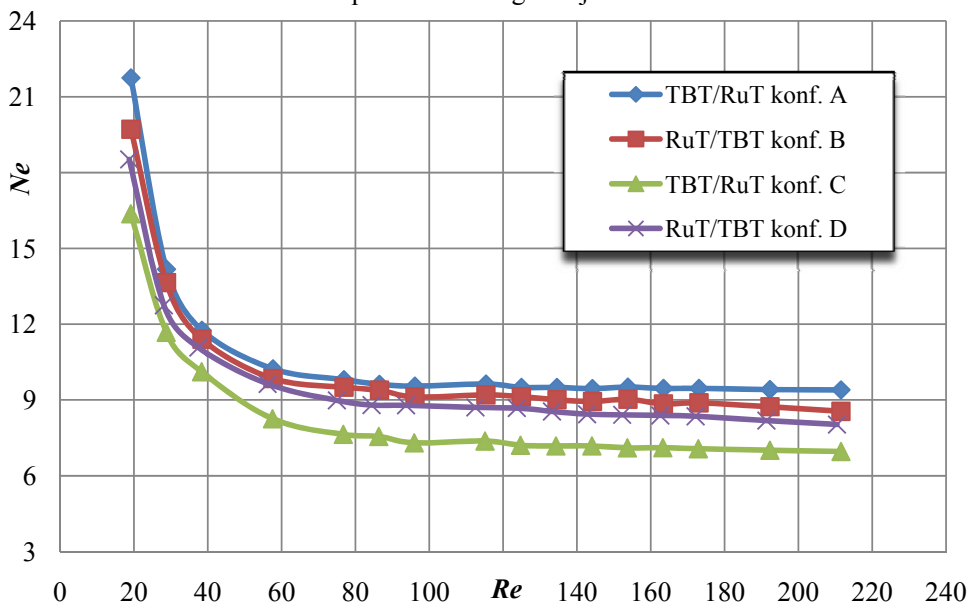
$$T_{iz} > \left(\frac{T_{i-90} \dots T_{i-1}}{90} \right) * 1,01 ; T_{ik} < \left(\frac{T_{i+1} \dots T_{i+90}}{90} \right) * 1,01 \quad (3)$$

Na sliki 3 sta prikazana originalen signal (svetlo) in po proceduri (2) očiščen signal.

3. Rezultati in razprava

3.1 Moč mešanja

Pri mešanju kapljevine so bile izmerjene moči mešal pri različnih vrtilnih frekvencah in izražene z brezdimenzijskimi števili Ne in Re . Na sliki 4 je posredno prikazana odvisnost moči od vrtilne frekvence mešala pri štirih konfiguracijah.



Slika 4: Odvisnost Ne od Re pri mešanju kapljevine z dvostopenjskim mešalom.

Konfiguraciji A in B se razlikujeta samo pri kombinaciji mešal zgoraj/spodaj, razdalja med mešali je bila enaka. Pri vizualnem opazovanju mešanja pri konfiguracijah A in B je bil izstopajoč tok iz posameznega mešala samostojen in podoben značilnemu toku pri mešanju z enim mešalom. Razlika vrednosti Ne števila pri konfiguracijah A in B je bila minimalna. Podobne so ugotovitve pri mešanju z dvostopenjskim Rushtonovim mešalom [4], da je izstopajoč tok iz mešala, ki tvori cirkulacijo kapljevine v posodi, lahko neodvisen, če je dovolj velika razdalja med mešali, sicer nastane združujoč (interaktiven) tok z izstopajočim tokom drugega mešala. Konfiguraciji C in D sta enakih geometrijskih razmerij, razlika je v namestitvi mešal zgoraj/spodaj; konfiguracija C ima nameščeno TBT/RuT mešalo, konfiguracija D pa RuT/TBT mešalo. Pri vseh konfiguracijah so bile pri robnem pogoju $38000 \leq Re \leq 211000$ izračunane sledeče povprečne vrednosti: (i) $Ne_A=9,74$, (ii) $Ne_B=9,26$, (iii) $Ne_C=7,06$ in (iv) $Ne_D=8,79$. Pri tem je zanimivo, da je $Ne_D > Ne_C$, saj je to ravno obratna kombinacija mešal zgoraj/spodaj kot pri A/B. Do razlike v vrednostih Ne števila pride izključno zaradi različnih tokovnih struktur. Po viru [5] je vrednost Ne število manjše za 20% pri združujočem izstopajočem toku, saj nastaneta dve samostojni cirkulaciji kapljevine. Pri samostojnem izstopajočem toku iz mešala se tako tvorijo pri dveh mešalih na gredi štiri samostojne cirkulacije kapljevine. Pri vizualnem opazovanju mešanja (kjer smo dodali minimalno količino zraka za sledenje mehurčkov) je pri konfiguraciji C je razviden združujoč tok v posodi, medtem ko je pri konfiguraciji D bolj očiten samostojen posamičen izstopajoč tok iz mešala. Po viru [6] velja, da je vrednost Ne števila odvisna od celotnega

geometrijskega razmerja; razdalja med mešali močno vpliva na vrsto izstopajočega toka iz mešala. Pri konfiguraciji A je opazen samostojen izstopajoč tok, pri konfiguraciji C pa združujoč tok, kar zmanjša vrednost Ne število tudi do 20 %. Pri konfiguraciji A je Ne število za 27,5% večje kot pri konfiguraciji C. Pri mešalu TBT/Rut (konf. A) se je pri vizualnem opazovanju začela aeracija pri $Re \approx 145000$, medtem ko pri mešalu TBT/RuT (C) pri $Re \approx 155000$. Z naraščanjem vrtilne frekvence postaja aeracija intenzivnejša, kar se odraža z zmanjšanjem vrednosti Ne števila in je skupno vsem štirim konfiguracijam.

3.2 Časi pomešanja

Časi pomešanja so bili merjeni pri različnih Froudovih številih v enofaznem sistemu in so predstavljeni v tabeli 2. Največji standardni odklon je bil izračunan pri konfiguraciji A pri Froudovem številu 0,5 in sicer $\sigma = 0,15$. Meritve časov pomešanja so potekale pri frekvenci zajema podatkov 500Hz, čas meritve je trajal 14 sekund, izvedene so bile tri ponovitve.

Tabela 2: Časi pomešanja pri različnih konfiguracijah in vrtilnih frekvencah.

Konfiguracija	$n \text{ (min}^{-1}\text{)}$	Čas pomešanja (s)	Standardni odklon (σ)
A	266	1,705	0,046
	307	1,557	0,143
	343	1,533	0,15
	376	1,415	0,021
B	266	1,821	0,089
	307	1,579	0,071
	343	1,468	0,116
	376	1,363	0,074
C	266	1,345	0,071
	307	1,258	0,042
	343	1,096	0,074
	376	0,978	0,068
D	266	1,475	0,044
	307	1,436	0,092
	343	1,352	0,081
	376	1,211	0,055

Pri vrtilni frekvenci 266 min^{-1} se je najkrajši čas pomešanja pojavil pri konfiguraciji C, sledijo časi pri D, A in B. Iz izmerjenega sledi, da so bistveno krajši časi pomešanja doseženi pri konfiguracijah C in D, pri obeh je višina vode v posodi manjša ter krajša razdalja med mešali. Pri konfiguraciji C, kjer je čas pomešanja najkrajši, je značilen tudi združujoč tok iz obeh mešal. Pri $n=307 \text{ vrt}^{-1}$ je "zaporedje konfiguracij" glede na čas pomešanja enak kot pri $n=266 \text{ vrt}^{-1}$ in sicer C, D, A in B. Pri $n=343 \text{ vrt}^{-1}$ je bil najkrajši čas pomešanja izmerjen pri konfiguraciji C, sledijo časi pri konfiguracijah D, B in A. Pri $n=376 \text{ vrt}^{-1}$ se je zopet pojavil najkrajši čas pomešanja pri konfiguraciji C, sledili so časi pri konfiguracijah D, B in A.

Konfiguracija C je imela bistveno krajši čas pomešanja od ostalih zaradi značilnega združujočega toka iz mešal. Krajši čas pomešanja je bil prav tako pri konfiguraciji C in D, kjer je krajša razdalja med mešali, medtem je bil čas pomešanja pri konfiguraciji A in B daljši, prav tako kot razdalja med mešali. Bistvena razlika med izmerjenimi vrednostmi časov pomešanja pri različnih vrtilnih frekvencah se je pokazala v tem, da je pri vsaki

konfiguraciji dosežen krajši čas pomešanja pri višji vrtilni frekvenci, torej pri večji disipirani moči mešala.

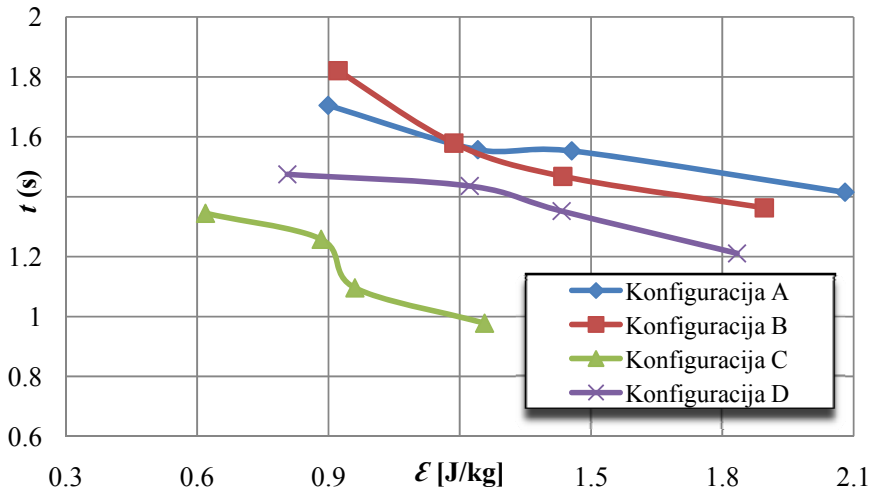
Na podlagi rezultatov časov pomešanja pri vseh konfiguracijah in vrtilnih frekvencah je bilo ugotovljeno, da so najkrajši časi pomešanja doseženi pri konfiguraciji C. Rezultati časov pomešanja predstavljajo, da se čas pomešanja krajša, če se povečuje vrtilna frekvenca, torej vnos energije v sistem, vse do poplavnega stanja spodnjega mešala [10]. Časi pomešanja so pa različni tudi glede na izbrano konfiguracijo. Če upoštevamo rezultate disipirane moči mešal, opazimo, da konfiguracija C izraža manjšo moč kot ostale konfiguracije, hkrati je to konfiguracija z najkrajšimi časi pomešanja. Pri konfiguraciji C je bil opazen združujoč tok mešanja, zaradi krajše razdalje med mešali in zaradi konkretne izbire spodnjega in zgornjega mešala.

3.3 Odvisnost časov pomešanja od disipirane energije mešala

Efektivnost mešanja je smiselno prikazati kot minimalno vloženo energijo mešanja pri doseženem najkrajšem času pomešanja. Tako je na sliki 5 predstavljena odvisnost časov pomešanja od specifične disipirane energije mešala. Specifična disipirana energija je predstavljena kot vloženo delo (produkt moči mešala in časa pomešanja) za mešanje celotne (mase) kapljevine, definirano kot:

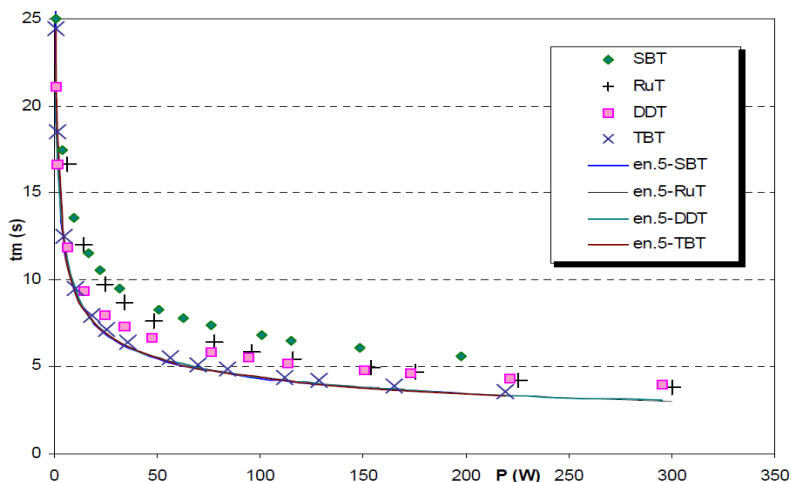
$$\varepsilon = P \cdot t / m_v. \quad (4)$$

Specifične vrednosti ε so pri konfiguraciji C manjše od ostalih merjenih konfiguracij, kar



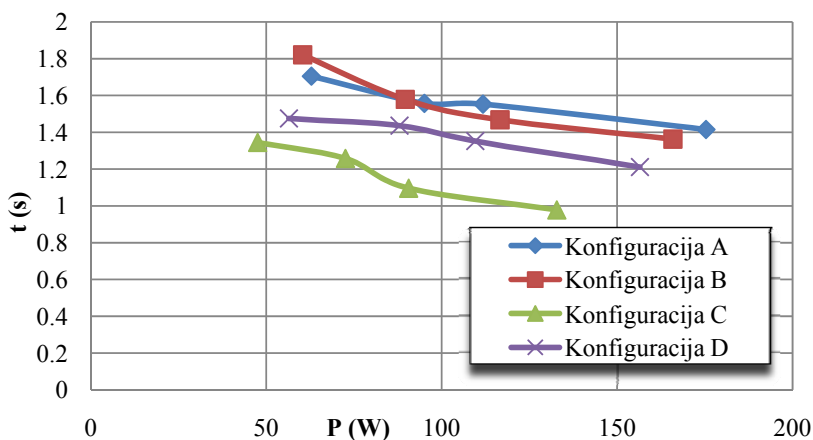
Slika 5: Odvisnost časov pomešanja od disipirane energije mešala različnih konfiguracij

Pri konfiguraciji C se porabi najmanj energije za doseganje krajših časov pomešanja. Skupna lastnost konfiguracije C in A je namestitev mešal in sicer; spodnje mešalo (RuT) in zgornje mešalo (TBT). Posebna oblika zavrtih lopatic pri TBT mešalu omogoča izstopajoč tok iz mešala poševno navzdol v smeri med radialno in aksialno smerjo iztekanja in tvori en sam združujoč tok obeh mešal. Na učinkovitost torej tudi vpliva izbira razdalje med spodnjim in zgornjim mešalom, ter sama izbira spodnjega in zgornjega mešala, kar v bistvu pogojuje vrsto izstopajočega toka iz obeh mešal. Slika 6 je povzeta po delu [9] kjer so predstavljeni časi pomešanja pri mešanju z enim mešalom in služi zgolj za orientacijsko primerjavo z našimi rezultati prikazanimi na sliki 7



Slika 6: Odvisnost časov pomešanja od moči mešala enostopenjskega mešala [9]

Izmerjeni časi pomešanja kapljčevine z enim mešalom (različne izvedbe [9]) dosegajo pri moči mešala 100W okoli 5s, pri mešanju z dvema mešali (različne konfiguracije) in enaki moči pa je dosežen čas bistveno krajši, od ~1s (konf. C) do 1,5s (konf. D, B in A). Skupna lastnost vsem je, da se s povečanjem disipirane energije časi pomešanja krajšajo.



Slika 7: Odvisnost časov pomešanja od moči mešala različnih konfiguracij

4. Zaključki

V prispevku je predstavljena analiza učinkovitosti mešanja kapljčevine z dvostopenjskim mešalom. Le to je bilo sestavljeno iz Rushtonovega standardnega mešala in v LFDT razvitega in patentiranega mešala za zaviti lopaticami pri različnih geometrijskih kombinacijah.

Efektivnost mešanja je izražena z močjo mešanja in časom pomešanja. Eksperimentalno je ugotovljeno, da je najmanjša moč mešanja dosežena pri dvostopenjskem mešalu konfiguracije C, kjer je zaradi manjše razdalje med mešali značilen združujoč. Prav tako je iz

rezultatov časov pomešanja ugotovljeno, da so pri konfiguraciji C doseženi tudi najkrajši času pomešanja. Tako je pri konfiguraciji C dosežena največja učinkovitost mešanja.

Iz analize odvisnosti časov pomešanja od vložene specifične disipirane energije mešala (predstavljene kot vloženo delo za mešanje celotne kapljevine) izhaja, da je učinkovitost pri konfiguraciji C tudi za 50% boljša od ostalih.

Zahvala

To delo je del večjega projekta št. P2-162. , ki ga financira *Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport RS*.

Oznake

g - zemeljski pospešek (m/s^2)
 n - vrtilna frekvenca mešala (s^{-1})
 P - moč mešala (W)
 ν - kinematična viskoznost (m^2/s)
 σ - standardni odklon
 ρ - gostota (kg/m^3)
 T_{iz} - začetni čas pomešanja

T_{ik} - končni čas pomešanja
 \mathcal{E} - specifična disipirana energija (J/kg)
 $W/\text{kg?}$
 P_i - moč mešala (W)
 m_v - masa vode v posodi (kg)
Reynoldsovo število: $Re = D^2 n / \nu$
Newtonovo število: $Ne = P / (\rho n^3 D^5)$

Viri literature

- [1] Bombač, A., Vpliv geometrijskih parametrov na Newtonovo število pri aeraciji v posodi z mešali, *Strojniški vestnik* (44) št. 3-4, 105--116, **1998**
- [2] Bombač A., Žun I.: Dispergiranje zraka v posodi z modificiranim diskastim mešalom z zavrtimi lopaticami, Slovenski kemijski dnevi 2005, Maribor, Slovensko kemijsko društvo, **2005**
- [3] Bombač, A., Žun, I., Eksperimentalna raziskava učinkovitosti modificiranega turbinskega mešala. Kuhljevi dnevi 2005, Podčetrtek, Slovensko društvo za mehaniko, **2004**
- [4] Avinash R., Khopkar., Philippe A. Tanguy., CFD Simulation of Gas-Liquid Flows in Stirred Vessel Equipped with Dual Rushton Turbines: Influence of Parallel, Merging and Diverging Flow Configurations., *Chemical Engineering Science*, 63, 3810-3820, **2008**
- [5] Wernersson, E.S., Christian Trägårdh, C., Food Engineering, *Chemical Engineering Journal*, 72, 97-107, **1999**
- [6] Bombač A., Vpliv geometrijskih parametrov na Newtonovo število pri aeraciji v posodi z mešali, *Strojniški vestnik* (44) št. 3-4, 105--116, **1998**
- [7] Bombač A., Zupančič N., Žun I., Poraba energije pri mešanju z dvostopenjskim mešalom, Kuhljevi dnevi 2010, **2010**
- [8] Zupančič N., Eksperimentalna raziskava osnovnih karakteristik različnih konfiguracij dvostopenjskega mešala, diplomsko delo, FS, v izdelavi
- [9] Bombač, A., Žun, I., Eksperimentalna raziskava učinkovitosti modificiranega turbinskega mešala, Kuhljevi dnevi 2005, **2005**
- [10] Bombač, A., Žun, I., Individual impeller flooding in aerated vessel stirred by multiple-Rushton Impeller. *Chem. eng. j.*, 116, 85-95, **2006**



Harmonsko vzbujanje dinamskega sistema ob sočasnem spremljanju modalnih parametrov v realnem času

M. Česnik¹, J. Slavič¹ in M. Boltežar¹

Harmonic excitation of the dynamic system with simultaneous real-time monitoring of the modal parameters

Povzetek. V prispevku je predstavljena zasnova preizkusa za dinamično obremenjevanje preizkušanca s harmonskim vzbujanjem v bližini resonančnega vrha ob sočasni identifikaciji trenutne lastne frekvence in trenutnega dušenja. Resonančno vzbujanje vzorca na elektro-dinamskem strelniku privede do akumulacije poškodbe, ki se jo lahko zazna kot spremembo modalnih parametrov. S predstavljeno metodologijo sočasne identifikacije, ki temelji na poenostavitvi preizkušanca na sistem z eno prostostno stopnjo, se vzbujevalni signal samodejno prilagaja trenutnim modalnim parametrom preizkušanca in na ta način zagotavlja zahtevani nivo obremenitev.

Abstract. The development of a new fatigue testing methodology based on the dynamic response of the test specimen to the harmonic excitation in near-resonant area are presented in this paper. When the specimen is excited with electro-dynamical shaker close to resonance the damage accumulation results in the change of modal parameters. The presented methodology of simultaneous real-time identification of modal parameters, based on a single-degree-of-freedom system, is used for automatic adjustment of the excitation signal, which ensures the required loading of the specimen.

1 Uvod

Načini identifikacije poškodb se v grobem delijo na lokalne (ultrazvok, penetrant) in globalne pristope. Enega od globalnih pristopov predstavlja modalna analiza konstrukcije, kjer s spremljanjem modalnih parametrov (lastne frekvence, oblike in dušenja) zaznamo kdaj, kje in kako velika poškodba se pojavi [1, 2, 3]. Poseben izziv, ki temelji na spremljanju modalnih parametrov, je vnaprejšnje napovedovanje poškodb med samim procesom utrujanja.

Bedewi in Kung [4] sta bila med prvimi, ki sta pri kompozitnih strukturah poškodbo zaradi utrujanja določila na podlagi spremembe lastnih frekvenc. Ugotovila sta, da se z akumulacijo

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

poškodbe lastna frekvenca sistema niža, dušenje pa narašča. Podobno spreminjanje modalnih parametrov so Shang *et al.* [5] izmerili tudi na vzorcih pločevin s točkovnim zvarom, Wang *et al.* [6] pa so iz eksperimenta na podobnih vzorcih izpeljali empirično povezavo med skupno poškodbo strukture in spremembo lastne frekvence. Njihov model utrujanja je pri obremenjevanju vzorcev z naključno obremenitvijo celo točneje napovedal življenjsko dobo kot metoda štetja ciklov po rainflow metodi [7]. Giannoccaro [8] je opazoval pojav nižanja resonanc in anti-resonanc na enostavnih jeklenih vzorcih z zarezo. Podobno je Colakoglu [9] ugotovil, da z utrujanjem jeklenih vzorcev pride tudi do opaznega naraščanja strukturnega dušenja [9]; Curadelli *et al.* [10] so izdelali model za napoved poškodb glede na spremembo dušenja sistema. Navedeni avtorji [5, 6, 7, 10] so pri raziskavah zgolj opazovali modalne parametre med procesom utrujanja, ki so ga izvajali na servohidravličnih preizkuševališčih. Obraten pristop so uporabili George *et al.* [11], ki so za utrujanje preizkušanca izkoristili njegov dinamski odziv v resonančnem območju, vzbujanje preizkušanca pa so izvedli z elektro-dinamskim stresalnikom. Njihova metodologija je hitrejša od klasičnih preizkusov na servohidravličnih strojih, obenem pa je ujemanje rezultatov med klasičnim in "resonančnim" preizkusom utrujanja zelo dobro. Logično nadaljevanje dosedanjega raziskovalnega dela predstavlja združitev obeh opisanih pristopov: izvedba utrujanja z vzbujanjem v bližini lastnih frekvenc in spremljanje lastne dinamike preizkušanca za napoved poškodb. V prispevku je predstavljena zasnova in izvedba eksperimenta, pri katerem je mogoče na enostaven način in brez prekinitev sočasno:

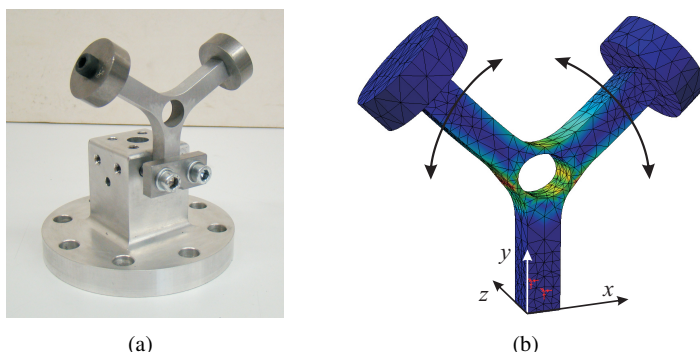
- utrujati vzorec v resonančnem območju,
- zagotavljati željen nivo napetosti na kritičnem mestu,
- spremljati spreminjanje lastne frekvence in dušenja.

V poglavju 2 je za predlagano geometrijo Y nosilca predstavljena analiza ustreznosti na numeričnem modelu. V nadaljevanju sta prikazani postavitev in kalibracija eksperimenta (poglavje 3), analiza meritev in prikaz rezultatov pa sta navedena v poglavju 4.

2 Numerična analiza vzorca

Razviti preizkus utrujanja temelji na dinamskem odzivu preizkušanca pri vzbujanju v resonančnem območju. Le-tega preverimo z analizo numeričnega modela glede na tri kriterije: ustreznost lastnih frekvenc, lastnih oblik in napetostnih stanj na kritičnih mestih. Lastna frekvenca, v bližini katere se izvaja utrujanje, mora biti primerno oddaljena od ostalih lastnih frekvenc. Ob vpetju vzorca na stresalnik mora biti možno vzbujati vzorec v lastni obliki, obenem pa se morajo mesta z največjimi napetostmi (kritična mesta) pojaviti tam, kjer je mogoče pritrditi merilni listič na dejanskem vzorcu. Zaradi primerljivosti rezultatov nove metodologije z rezultati klasičnih testov želimo, da je napetostno stanje na kritičnem mestu čimbolj podobno enoosnemu napetostnemu stanju.

Navedenim zahtevam ustreza geometrija Y nosilca, prikazana na sliki 1(a). Nosilec je izdelan iz aluminijeve litine A-S8U3, nanj so pritrjene jeklene uteži mase 52.5 g. Pri modalni analizi numeričnega modela se izkaže, da je četrta lastna oblika (slika 1(b)) primerna za utrujanje v resonanci.



Slika 1 : a) Vpet Y nosilec in b) njegova četrta lastna oblika.

Predlagano geometrijo je potrebno preveriti glede na navedene zahteve. Četrta lastna frekvenca se pojavi pri 794 Hz ter je od tretje in pete lastne oblike oddaljena več kot 300 Hz. Prevladujoče gibanje pri četrtni lastni obliki je translacija uteži v smeri y osi, kar sovпада s smerjo vzbujaanja pri vpetju Y nosilca na sliki 1(a). Mesto največjih napetosti se pojavi na zunanji površini ob izvrtini v sredini Y nosilca, kamor je možno pritrditi merilni listič v smeri največje glavne napetosti. Analiza napetostnega stanja na kritičnem mestu razkrije, da je razmerje med glavnimi napetostmi $\sigma_{22}/\sigma_{11} = 0.22$. Napetostno stanje torej ni popolnoma enoosno; ker se glavna napetost σ_{11} (merjena napetost) in Von Misesova primerjalna napetost σ_{VM} (kriterij za utrujanje pri večosnem napetostnem stanju) razlikujeta za manj kot 3% je porazdelitev napetosti na kritičnem mestu sprejemljiva.

3 Postavitev eksperimenta

Med testom utrujanja je potrebno zagotavljati:

- primerno vzbujevalno frekvenco ω glede na trenutno lastno frekvenco Y nosilca ω_0 ,
- harmonski potek napetosti na kritičnem mestu s konstantno in vnaprej definirano amplitudo.

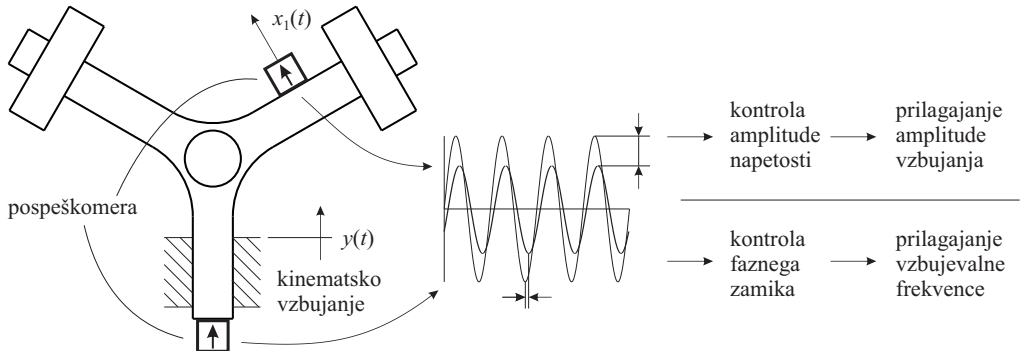
Spremljanje trenutne lastne frekvence Y nosilca ob sočasnem harmonskem vzbujaanju se izkaže za težavno, saj je zaradi nestabilnega odziva sistema v resonanci potrebno vzbujaati malce nad oziroma pod lastno frekvenco, t.j. 2-3Hz ob resonanci pri 800Hz. Konstanten odmik vzbujevalne frekvence od lastne frekvence se izvaja s spremljanjem faznega zamika ϕ med signaloma vzbujaanja $y(t)$ in odziva $x_1(t)$ (slika 2), kjer zaradi harmonskega vzbujaanja predpostavimo

$$y(t) = Y \sin(\omega t), \quad (1)$$

$$x_1(t) = X_1 \sin(\omega t - \phi), \quad (2)$$

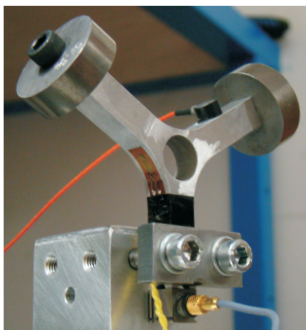
kjer je X_1 amplituda pomikov na odzivnem in Y amplituda pomikov na vzbujaanem mestu (slika 2).

Pri zagotavljanju amplitude napetosti se uporaba merilnega lističa izkaže za neprimerno, saj lahko merilni listič zaradi utrujanja odpove pred porušitvijo Y nosilca, hkrati pa njegova pritrditev podaljša čas priprave vzorca. Kontrola napetosti se tako izvaja posredno preko razlike pomikov $Z = X_1 - Y$, slika 2. Ker sta tako vzbujanje kot odziv harmonski funkciji, velja enostavna relacija med pomikom in pospeškom $x_1(t) = -\ddot{x}_1(t)/\omega^2$.

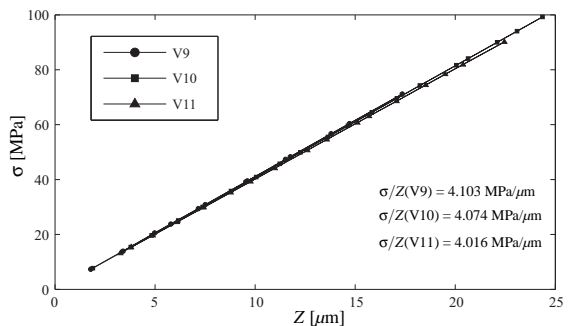


Slika 2 : Shema postavitev eksperimenta.

Primernost posredne meritve napetosti je bila eksperimentalno preverjena s kalibracijo treh vzorcev V9-V11, kjer se je hkrati spremljalo napetost σ na kritičnem mestu preko merilnega lističa in razliko pomikov Z preko dveh pospeškomerov (slika 3(a)). Kalibracija se je izvedla pred začetkom utrujanja posameznega vzorca, rezultati so prikazani na sliki 3(b). Odstopanja med nakloni regresijskih premic treh vzorcev se razlikujejo za manj kot 2%, torej opisani pristop zagotavlja dobro ponovljivost in hkrati ustreza težnji po čimbolj enostavnem eksperimentu.



(a)



(b)

Slika 3 : a) Postavitev eksperimenta pri kalibraciji in b) rezultati kalibracije vzorcev V9-V11.

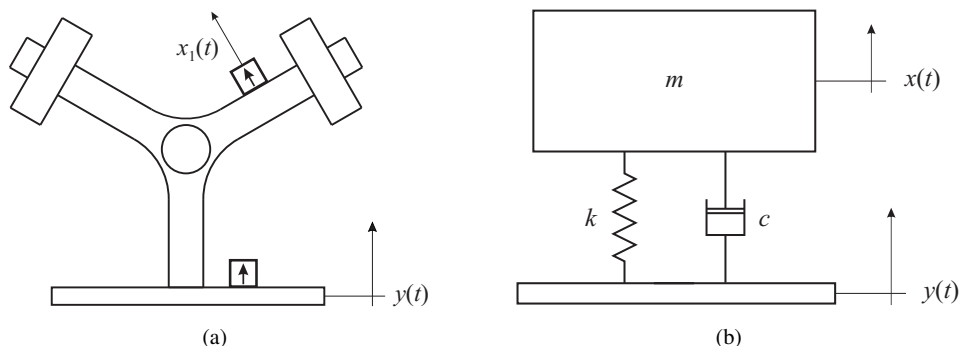
4 Analiza meritev in rezultati preizkusov

Med izvajanjem eksperimenta se neposredno merita pospešek vzbujanja $\ddot{y}(t)$ [m/s²] in pospešek odziva $\ddot{x}_1(t)$ [m/s²], posredno pa določimo tudi amplitudo vzbujanja Y in odziva X_1 [m], vzbujevalno frekvenco f [Hz] oziroma ω [rad/s], fazni zamik ϕ [°, rad] ter napetost na kritičnem mestu σ_{\max} [MPa].

Kot je v Uvodu pojasnjeno, je poleg utrujanja cilj tudi spremljanje modalnih parametrov sistema (lastne frekvence ω_0 in razmernika dušenja ξ) med utrujanjem. Za identifikacijo le-teh je potrebno izpeljati preračun, pri katerem določimo ω_0 in ξ samo z uporabo izmerjenih, zgoraj navedenih veličin.

4.1 Sočasna identifikacija trenutne lastne frekvence in razmernika dušenja

Glede na to, da se Y nosilec vzbuja z eno harmonsko komponento, se lahko kot nadomestni model uporabi dinamski sistem z eno prostostno stopnjo (SDOF sistem, slika 4(b)).



Slika 4 : Primerjava med kinematsko vzbujevanim a) Y nosilcem in b) SDOF sistemom.

V ustaljenem stanju sta razmerje amplitud X/Y in fazni zamik ϕ SDOF sistema [12]:

$$\left| \frac{X}{Y} \right|_{SDOF\,sistem} = k_i \cdot \left| \frac{X_i}{Y} \right|_{Y\,nosilec} = \sqrt{\frac{1 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}, \quad (3)$$

$$\tan \phi = \frac{2\xi \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^3}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}, \quad (4)$$

kjer konstanta k_i predstavlja razmerje med ojačanjem odziva SDOF sistema X/Y in ojačanjem odziva i -te prostostne stopnje Y nosilca X_i/Y ter je odvisna od lokacije meritve odziva na Y nosilcu. Za izbrano merilno mesto in pripadajoči odziv $x_1(t)$ (slika 4(a)) se je konstanto k_i določilo za vsak vzorec posebej na sledeč način: najprej s širokopasovnim vzbujevanjem nosilca izmerimo začetno ω_0 , nato začnemo vzorec harmonsko utrujati, kjer lahko posredno merimo še

ϕ , Y , X_1 in ω . Neznanki ostaneta dušenje ξ in konstanta k_1 , ki ju določimo z rešitvijo sistema enačb (3) in (4).

Ob nadaljevanju utrujanja se pričneta spreminjati modalna parametra ω_0 in ξ , ki ju prav tako identificiramo iz sistema enačb (3) in (4), kjer k_1 sedaj predstavlja znano vrednost.

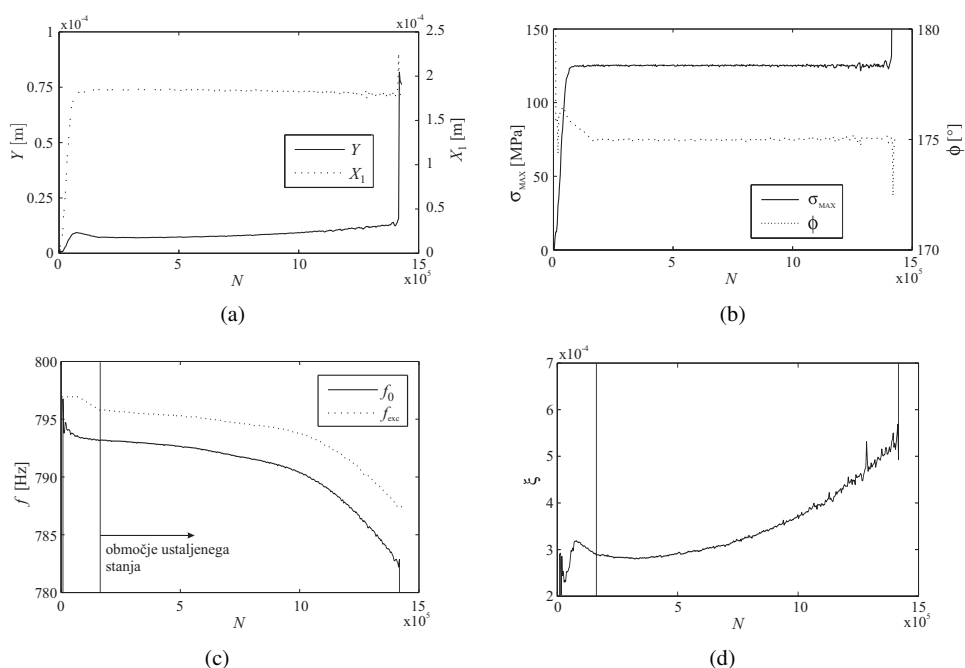
4.2 Rezultati preizkusa in razprava

Za potrditev uporabnosti predstavljenega preizkusa sta bila izvedena dva ločena eksperimenta:

- neprekinjen preizkus na vzorcu V11, s katerim se preveri izvedljivost in primernost predstavljenega pristopa,
- prekinjena preizkusa na vzorcih V12 in V13, s katerima se preveri pravilnost identificirane lastne frekvence ω_0 pri vzbujanju v *nadresonančnem* in *podresonančnem* področju.

4.2.1 Neprekinjen preizkus utrujanja

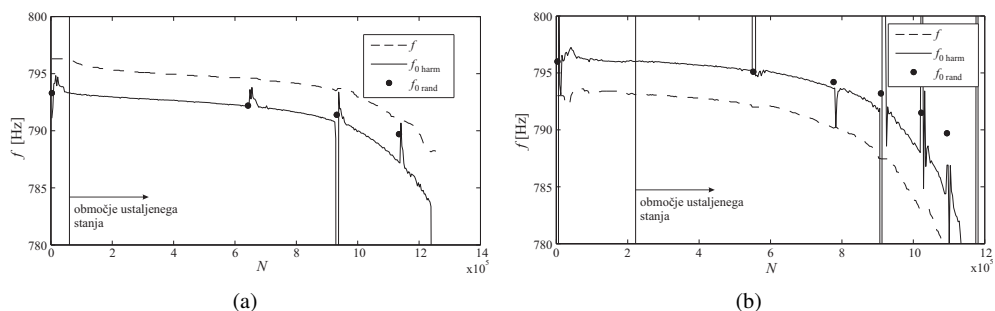
Vzorec V11 se je utrujalo s $\sigma_{\max} = 125$ MPa v nadresonančnem območju. Iz slike 5 je razvidno, da bila napetost na kritičnem mestu konstantna navkljub nižanju lastne frekvence. Dodatno potrditev primernosti preizkusa je nastanek razpoke po $1,4 \cdot 10^6$ ciklov na pričakovanem, kritičnem mestu.



Slika 5 : Test utrujanja vzorca V11: a) izmerjeni pomiki, b) kontrolirana napetost in fazni zamik, c) potek vzbujevalne in lastne frekvence ter d) dušenja.

4.2.2 Mestoma prekinjen preizkus utrujanja

Postopek za izračun lastne frekvence in dušenja (poglavje 4.1) je potrebno dodatno eksperimentalno preveriti. S tem razlogom sta se izvedla dva preizkusa na vzorcih V12 in V13. Vzorec V12 je bil vzbujan nadresonančno, vzorec V13 pa podresonančno; v obeh primerih je bila referenčna napetost $\sigma_{ref} = 125$ MPa. Rezultati meritev so prikazani na sliki 6, kjer je f vzbujevalna frekvenca, f_{0harm} lastna frekvenca, določena pri harmonskem vzbujanju in f_{0rand} lastna frekvenca, določena pri široko-spektralnem vzbujanju.



Slika 6 : Rezultati meritev za a) vzorec V12 in b) vzorec V13.

Iz rezultatov meritev ugotovimo, da je ujemanje med identificiranimi lastnima frekvencama na prvi polovici življenjske dobe dobro, kasneje pa pride do očitnih odstopanj.

Nepričakovan pojav, opazen sliki 6, je to, da se pri podresonančnem vzbujanju lastna frekvenca f_{0rand} oddaljuje od vzbujevalne frekvence, pri nadresonančnem vzbujanju pa se f_{0rand} približuje vzbujevalni frekvenci, čeprav je fazni zamik ϕ ves čas konstanten.

Vzrok za navedeno obnašanje sistema lahko iščemo v pojavu nelinearnosti ob nastanku razpoke približno na sredini življenjske dobe vzorca, saj je odziv nelinearnega sistema odvisen od vrste vzbujanja (harmonsko, naključno) in smeri (nadresonančno, podresonančno) prehoda.

5 Zaključki

Z razvitim eksperimentom je možno izvajati teste utrujanja na elektro-dinamskem stresalniku, ki so hitrejši od preizkusov na standardnih napravah za utrujanje. S preiščeno zasnovo preizkušanca je možno spremljati utrujanje pri kompleksnih napetostnih stanjih.

V primeru aluminijeve litine je padec lastne frekvence med utrujanjem sicer manjši kot pri sorodnih raziskavah na kompozitih in točkovnih zvarih, vendar je še vedno dovolj očiten za napoved porušitve izdelka. Opisan pristop je uporaben za aktivno kontrolo varnosti izdelka ter kompleksne izdelke in obratovalne pogoje, kjer je napoved poškodb zaradi utrujanja lahko nezanesljiva. Rezultati, ki so pridobljeni na treh testnih vzorcih, nakazujejo, da se s spremljanjem modalnih parametrov lahko zazna razpoke že na polovici življenjske dobe, saj se takrat pojavi odstopanje od linearnega modela, kar lahko pojasnimo z nelinearnostjo razpoke. Iz tega vidika je za natančnejše zaključke potrebno izvesti obširnejše preizkuse.

Opisan eksperiment je v trenutnem stanju splošen in ni omejen na določeno geometrijo ali

material. Z variacijami in nadgradnjo obstoječega preizkusa je možno izvesti natančnejše in uporabnejše rezultate glede na specifično področje, ki nas zanima.

Literatura

- [1] D. F. Mazurek in J. T. DeWolf, *Experimental Study of Bridge Monitoring Technique*, Journal of Structural Engineering 116, 2532–2549, 1990.
- [2] O. S. Salawu, *Detection of structural damage through changes in frequency: a review*, Engineering Structures 19, 125–130, 2003.
- [3] Y. J. Yan, L. Cheng, Z. Y. Wu in L. H. Yam, *Development in vibration-based structural damage detection technique*, Mechanical Systems and Signal Processing 21, 2198–2211, 2007.
- [4] N. E. Bedewi in D. N. Kung, *Effect of fatigue loading on modal properties of composite structures and its utilization for prediction of residual life*, Composite Structures 37, 357–371, 1997.
- [5] D. G. Shang, M. E. Barkey, Y. Wang in T. C. Lim, *Effect of fatigue damage on the dynamic response frequency of spot-welded joints*, International Journal of Fatigue 25, 311–316, 2003.
- [6] R. J. Wang, D. G. Shang, L. S. Li in C. S. Li, *Fatigue damage model based on the natural frequency changes for spot-welded joints*, International Journal of Fatigue 30, 1047–1055, 2008.
- [7] R. J. Wang in D. G. Shang, *Fatigue life prediction based on natural frequency changes for spot welds under random loading*, International Journal of Fatigue 31, 361–366, 2009.
- [8] N. I. Giannoccaro, A. Messina, R. Nobile in F. W. Panella, *Fatigue damage evaluation of notched specimens through resonance and anti-resonance data*, Engineering Failure Analysis 13, 340–352, 2006.
- [9] M. Colakoglu, *Description of Fatigue Damage Using a Damping Monitoring Technique*, Turkish Journal of Engineering and Environmental Sciences 27, 125–130, 2003.
- [10] R. O. Curadelli, J. D. Riera, D. Ambrosini in M. G. Amani, *Damage detection by means of structural damping identification*, Engineering Structures 12, 3497–3504, 2008.
- [11] T. J. George, J. Seidt, M. H. H. Shen, T. Nicholas in C. J. Cross, *Development of a novel vibration-based fatigue testing methodology*, International Journal of Fatigue 26, 477–486, 2004.
- [12] W. T. Thomson, *Theory of Vibration with Applications*, četrta izdaja, London, 1993.



Analiza porušitve pregrade po metodi SPH

*E. Džebo¹, D. Žagar², M. Četina³, M. Jeromeč⁴, T. Bajcar⁵, B. Širok⁶ in
G. Petkovšek⁷*

Analyses of a dam break experiment with the SPH method

Povzetek. V prispevku so predstavljeni rezultati laboratorijskih eksperimentalnih preizkusov in računalniških simulacij porušitve pregrade po metodi SPH. SPH (Smoothed particle hydrodynamics) je brez mrežna metoda za simulacije toka tekočin, kjer so računski elementi delci tekočine. Računalniške simulacije smo izvedli z modelom TisIsat, ki ga razvijamo na Katedri za mehaniko tekočin z laboratorijem Fakultete za gradbeništvo in geodezijo. Rezultati simulacij se dobro ujemajo z meritvami.

Abstract. The results of laboratory experimental testing and computer simulations of dam break with the SPH method are presented in the paper. Smoothed particle hydrodynamics is a meshless particle method for simulation of fluid flows. The TisIsat model, developed at the Faculty of civil and geodetic engineering, Chair of fluid mechanics with laboratory, was used. The results of the TisIsat model showed good agreement with measurements.

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

² Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

³ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

⁴ Ministrstvo za okolje in prostor, Agencija Republike Slovenije za okolje in Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

⁵ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

⁶ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

⁷ CGS plus, Inovativne okoljske in informacijske tehnologije in Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

1 Uvod

Za reševanje problemov v hidrotehniki se danes najpogosteje uporabljajo matematični modeli. Matematični model je skupek enačb, ki opisujejo nek pojav. Te enačbe rešujemo s pomočjo t.i. numeričnih metod, ki praviloma temeljijo na približnem računanju. Za simulacije toka tekočin se najpogosteje uporabljajo že preverjene mrežne metode: metoda končnih elementov, metoda robnih elementov in metoda končnih razlik. Te metode so se v hidravlični inženirski praksi dobro izkazale, vendar kljub temu imajo nekatere slabosti. Med njihove pomanjkljivosti sodi numerična difuzija, ki vpliva na točnost rezultatov. Vpliv numerične difuzije lahko zmanjšamo s prilagajanjem mreže pričakovani hidrodinamični sliki, vendar je ni mogoče povsem odpraviti.

Numerični difuziji se lahko izognemo z uporabo t.i. brez mrežnih numeričnih metod. Za modeliranje toka tekočin se najpogosteje uporablja SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) brez mrežna metoda. Metodo so razvili Lucy [8] ter Gingold in Monaghan [3] za potrebe simulacije astrofizikalnih problemov. Kasneje je bila prvotna oblika metode SPH razširjena na simulacije toka s prosto gladino [11]. Pri SPH metodi proučujemo same delce tekočine. Trdni robovi se pri metodi SPH najpogosteje opišejo z mirujočimi robnimi delci [2]. V tej študiji je bila uporabljena metoda modela TisIsat, ki je podrobno opisana v članku [13].

V članku smo analizirali laboratorijsko porušitev pregrade po metodi SPH. Tovrstni primeri se pogosto uporabljajo za preverjanje SPH modelov [1, 5, 9, 14, 18 in 19]. Simulacije porušitve pregrad na realni topografiji pa so redke [4, 6, 7, 15, 16 in 20].

2 Metoda

Metoda SPH je Lagrangeova metoda, pri kateri proučujemo same delce tekočine. Vsak delec opišemo s točko v prostoru $r_0 = (x_0, y_0, z_0)$, kjer se delec nahaja v začetnem času. Pri Lagrangeovem načinu sledimo delcu po prostoru in proučujemo parametre, kot so hitrost delca, gostota, ... Vrednost funkcije A v poljubni točki r_i (1) izračunamo kot:

$$A(r_i) \approx \int A(r) W(r - r_i) dr \quad (1)$$

oziroma v diskretizirani obliki (2):

$$A(r_i) = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} A_j W(r_j - r_i) \quad (2)$$

kjer so vrednosti v položajih delcev r_j znane. W je tako imenovana jedrna funkcija. Poznamo več vrst jedrnih funkcij, najpogosteje pa se uporablja jedrna funkcija, ki je v obliki zvonaste krivulje (3) in sta jo predlagala Monaghan in Lattanzio [10]:

$$W(q) = \begin{cases} \left(1 - \frac{3}{2}q^2 + \frac{3}{4}q^3\right) / w & 0 \leq q < 1 \\ \frac{1}{4}(2-q)^3 / w & 1 \leq q < 2 \\ 0 & 2 < q \end{cases} \quad (3)$$

Vrednost parametra q se izračuna kot $q=l/h$, kjer je l razdalja med delcema r in r_i , h pa dolžina jedrne funkcije. Vrednost normalizacijskega faktorja w znaša $7\pi h^2/10$ za 2D simulacije in πh^3 za 3D simulacije.

Kontinuitetno enačbo v SPH obliki (4) izrazimo kot:

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \sum_j v_{ij} \cdot e_{ij} m_j W'_{ij} \quad (4)$$

kjer je ρ gostota, v vektor hitrosti in e smerni vektor. Indeks ij označuje razliko med vrednostma v točkah i in j . Sprememba tlakov se izračuna po enačbi stanja (5):

$$P = c^2(\rho - \rho_0) \quad (5)$$

kjer je c hitrost zvoka in je enaka desetkratniku največje predvidene hitrosti delcev tekočine.

Dinamično enačbo v SPH obliki (6) izrazimo kot:

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_j \left(\left(-\left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) + \frac{v'_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}}{3 |\mathbf{r}_{ij}|^3} \right) \mathbf{e}_{ij} + \frac{v'_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|^3} \right) m_j W'_{ij} + \mathbf{g} \quad (6)$$

Kjer je v' kinematična viskoznost ν deljeno s povprečno gostoto delcev i in j . Viskoznost med delci (7) se izračuna kot:

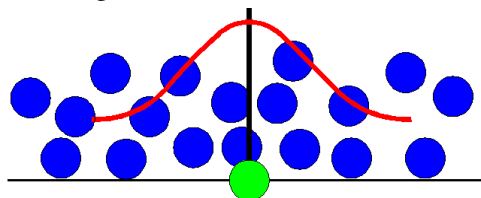
$$\nu_a = ah^2 |\mathbf{v}_{ij}| / |\mathbf{r}_{ij}| \quad (7)$$

in viskoznost ob steni (8) kot:

$$\nu_b = bh^2 |\mathbf{v}_{ij}| / |\mathbf{r}_{ij}| \quad (8)$$

kjer je h dolžina jedrne funkcije, a in b pa sta brezdimenzijska parametra viskoznosti med delci oz. ob stenah.

Z metodo SPH lahko izračunamo globino vode (slika 1) v določeni točki (zelena točka).



Slika 1: Izračun globine vode po metodi SPH.

Vsakemu delcu, ki se nahaja znotraj dosega jedrne funkcije, lahko določimo vrednost le-te s pomočjo enačbe (3). Pri računu globine je vrednost l enaka horizontalni dolžini med obravnavanim delcem tekočine (modra) in točko (zelena), kjer želimo izračunati globino vode (slika 1). Globino g lahko izračunamo po enačbi (9):

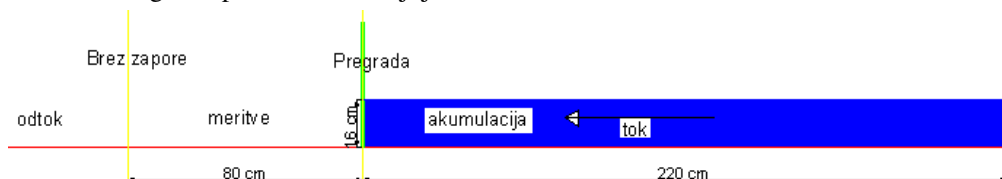
$$g = d^2 \sum_l W \quad (9)$$

kjer je $\sum_l W$ vsota vrednosti jedrnih funkcij posameznih delcev in d velikost delca.

Podrobnejši opis teoretičnih osnov SPH metode je v literaturi [12].

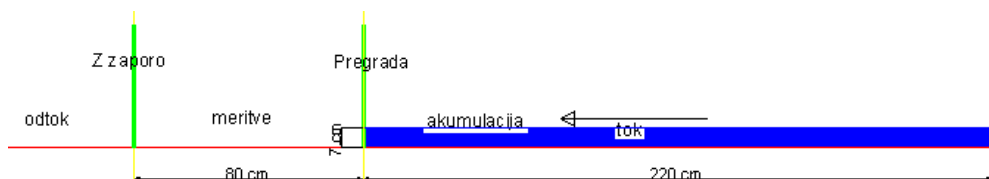
3 Opis laboratorijske porušitve pregrade

Primere porušitve pregrade smo izvedli v laboratoriju katedre za mehaniko tekočin v kanalu s steklenimi stranskimi stenami. V osnovi lahko eksperimente razdelimo v dve skupini. V prvo skupino sodijo eksperimenti, kjer voda po porušitvi pregrade odteče po kanalu (slika 2). Višina vodnega stolpca v akumulaciji je bila 16 cm.



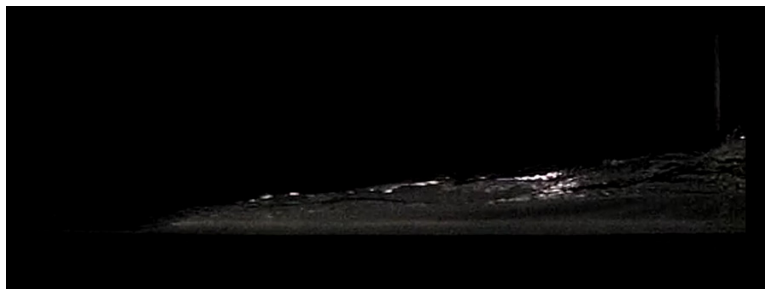
Slika 2: Laboratorijska porušitev pregrade brez zapore v kanalu.

Na razdalji 80 cm od pregrade smo postavili zaporo in ponovili postopek. Ti eksperimenti sodijo v drugo skupino. Po porušitvi pregrade se je poplavni val odbil od zapore (slika 3). Višina vodnega stolpca v akumulaciji je bila 7 cm.



Slika 3: Laboratorijska porušitev pregrade z zaporo v kanalu.

Dolžina akumulacije je bila 220 cm, širina kanala je enakomerna v akumulaciji in na območju meritev in znaša 20 cm. Meritve so bile izvedene v različnih vertikalnih vzdolžnih presekih kanala (oddaljenost od prednje stene je znašala 3,1 do 18,3 cm), osvetljenih s pomočjo halogenskega svetlobnega vira, ki je omogočil vizualizacijo širitve poplavnega vala v teh presekih [17]. S hitroslikovno digitalno kamero Casio EX-F1 (300 fps) smo posneli propagacijo poplavnega vala na območju od pregrade do zapore oz. na razdalji 80 cm od pregrade. Iz posnetkov smo odčitali potek gladine in napredovanje čela vala z natančnostjo 1/300 s. Posnetek laboratorijske porušitve pregrade brez zapore ($t = 1$ s) je prikazan na sliki 4.



Slika 4: Laboratorijska porušitev pregrade brez zapore v kanalu $t = 1$ s.

4 Podatki simulacij

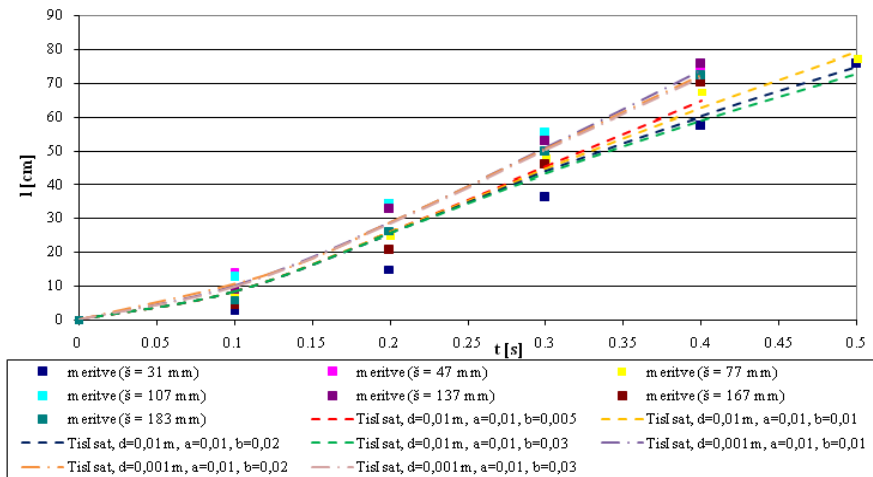
Simulacije smo izvedli z modelom TisIsat. Model razvijamo na Katedri za mehaniko tekočin UL-FGG in je namenjen simulacijam toka po metodi SPH. Začetni parametri simulacij so navedeni v tabeli 1. Opazovali smo napredovanje čela vala in spreminjanje višine vodnega stolpca.

Tabela 1: Začetni parametri simulacij

Parameter	Kratica	Vrednost
Število delcev	n	3520 - 352000 (brez zapore) 1540 - 154000 (z zaporo)
Velikost delcev	d	0,001 - 0,01 m
Parameter viskoznosti v tekočini	a	0,01
Parameter viskoznosti ob stenah	b	0,005 - 0,03

5 Rezultati

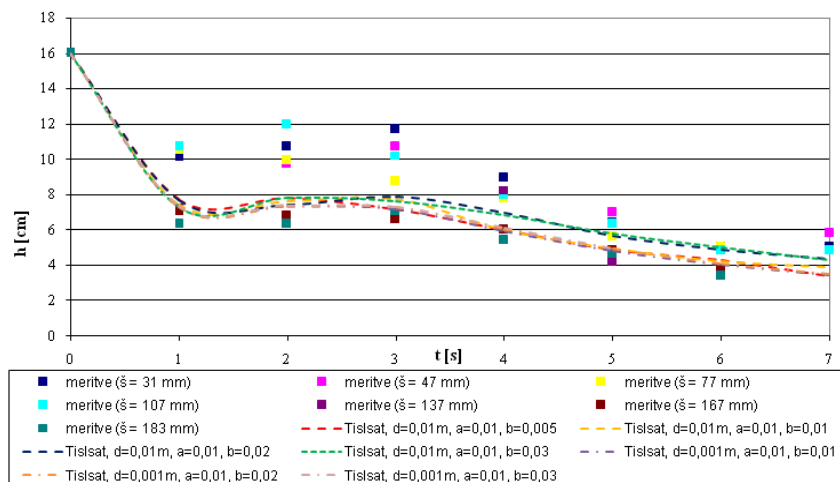
Simulacije, izvedene z modelom TisIsat smo primerjali z meritvami, izvedenimi na fizičnem modelu (slike 5, 6, 7 in 8). Na meritve, ki so bile posnete bližje steni kanala ima trenje ob steni večji vpliv. Iz rezultatov meritev je razvidno, da propagacija čela vala poteka najhitreje v obeh vzdolžnih profilih, ki sta najbližje sredini kanala in najpočasneje v profilih najbližje stenam.



Slika 5: Napredovanje čela vala (brez zapore v kanalu).

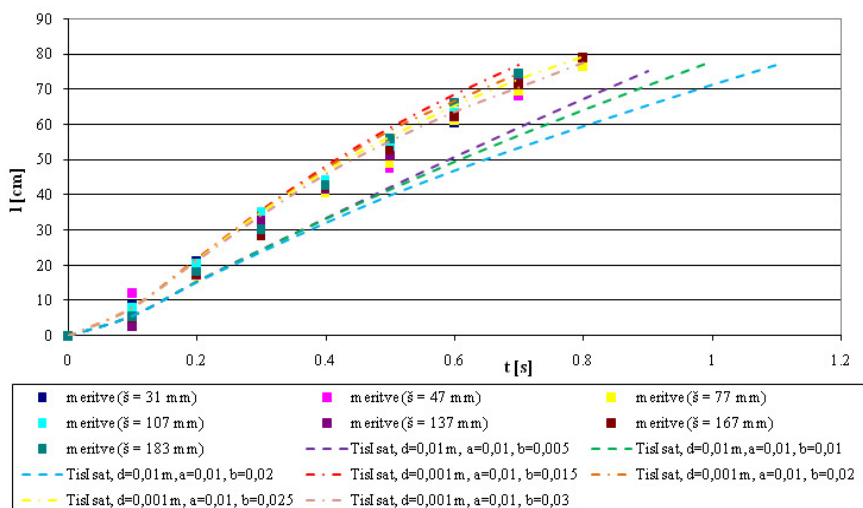
Slika 5 prikazuje napredovanje čela vala na primeru porušitve pregrade brez zapore v kanalu. Najprej smo izvedli simulacije z večjimi delci ($d = 0,01\text{ m}$) nato pa še z manjšimi ($d = 0,001\text{ m}$). Iz slike 5 je razvidno, da rezultati simulacij z manjšimi delci bolje sledijo meritvam, kot rezultati simulacij z večjimi delci.

Na sliki 6 je prikazano spreminjanje višine vodnega stolpca na primeru porušitve pregrade brez zapore v kanalu. Ugotovili smo, da se pri meritvah globina vode znatno spreminja po širini kanala. Simulacije z manjšimi delci bolje sledijo meritvam ob zadnji steni kanala, odstopanja ob prednji steni pa znašajo do 50 %.



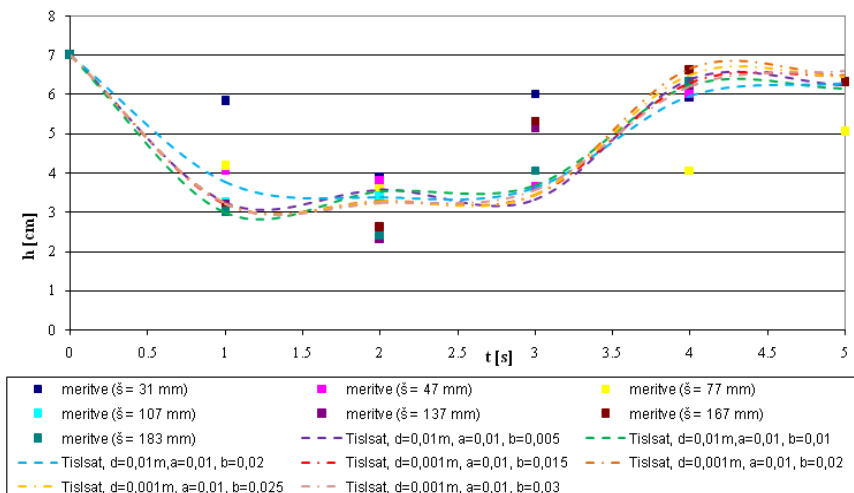
Slika 6: Spreminjanje višine vodnega stolpca (brez zapore v kanalu).

Napredovanje čela vala na primeru porušitve pregrade z zaporo v kanalu je prikazano na sliki 7. Tudi te simulacije so bile izvedene z različnimi velikostmi delcev in tudi pri teh primerjavah dobimo boljše ujemanje z meritvami na primerih simulacij, ki smo jih izvedli z manjšimi delci.



Slika 7: Napredovanje čela vala (z zaporo v kanalu).

Slika 8 prikazuje spreminjanje višine vodnega stolpca na primeru porušitve pregrade z zaporo. Rezultati simulacij z manjšimi delci in rezultati simulacije z večjimi delci ter vrednostjo parametra $b = 0,01$ razmeroma dobro sledijo meritvam.



Slika 8: Spreminjanje višine vodnega stolpca (z zaporo v kanalu).

Rezultati kažejo, da simulacije z manjšimi delci dajejo boljše rezultate. Z manjšanjem velikosti in povečevanjem števila delcev pa vplivamo na računski čas simulacij. Simulacije so bile izvedene na sistemu s štirimi procesorji Intel® Core™ i7 3,33 GH. Računski čas simulacij porušitve pregrade brez zapore v kanalu za 7 s dogajanje je bil 8 min ($d = 0,01$ m) oz. 125,5 ur ($d = 0,001$ m). Simulacije porušitve pregrade z zaporo v kanalu za 5 s dogajanje pa so potrebovale 4 min ($d = 0,01$ m) oz. 77 ur ($d = 0,001$ m) računskega časa. Iz zgoraj omenjenih ugotovitev sklepamo, da z 10 kratnim zmanjšanjem velikosti delcev povečamo računski čas za približno 1000 krat. Nadaljnje izvajanje simulacij z manjšimi delci na računalniku z omenjenim procesorjem bi bilo nesmiselno, saj bi bil računski čas predolg. Za izboljšanje rezultatov bi potrebovali računalnik z zmogljivejšimi procesorji.

6 Zaključek

V prispevku je predstavljena analiza porušitve pregrade po metodi SPH. Izvedene so bile simulacije z različnimi velikostmi delcev in različnimi vrednostmi parametra b . Pridobljene rezultate simulacij smo primerjali z meritvami, ki smo jih izvedli na fizičnem modelu. Po pričakovanju je analiza pokazala, da se rezultati simulacij izvedenimi z manjšimi delci bolje ujemajo z meritvami. Za nadaljnje izboljšanje rezultatov bi morali izvesti simulacije na računalnikih z močnejšimi procesorji.

Literatura

- [1] G. Agate, R. Guandalini, *The Use of 3D SPHERA Code to Support Spillway Design and Safety Evaluation of Flood Events*, 5th International SPHERIC Workshop, Manchester, United Kingdom, 267-272, 2010.

- [2] A.J.C. Crespo, M. Gómez- Gesteira, R.A. Dalrymple, *Boundary conditions generated by dynamic particles in SPH methods*, Computers, materials & continua, 5(3): 173-184, 2007.
- [3] R.A. Gingold, J.J. Monaghan, *Smoothed particle hydrodynamics: Theory and application to non spherical stars*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 181, 375-389, 1977.
- [4] A. Herault, A. Vicari, C. del Negro, R.A. Dalrymple, *Modeling Water Waves in the Surf Zone with GPU-SPHysics*, 4th International SPHERIC Workshop, Nantes, France, 77-84, 2009.
- [5] J. Leduc, F. Leboeuf, M. Lance, *Improvement of multiphase model using preconditioned Riemann solvers*, 5th International SPHERIC Workshop, Manchester, United Kingdom, 1-6, 2010.
- [6] E-S. Lee, D. Violeau, R. Issa, S. Ploix, R. Marc, *Simulating a Real Dam Spillway Flow with 3-D SPH*, 4th International SPHERIC Workshop, Nantes, France, 339-345, 2009.
- [7] H. Lee, S. Han, *Solving the shallow water equations using 2D SPH particles for interactive applications*. Vis Comput, 865-872, 2010.
- [8] L. Lucy, *A Numerical Approach to Testing the Fission Hypothesis*, Astronomical Journal, 82, 1013-1024, 1977.
- [9] S. Marrone, M. Antuono, A. Colagrossi, G. Colicchio, D. Le Touzé, G. Graziani, *Violent Fluid-structure impacts solved through a δ -SPH model*, 5th International SPHERIC Workshop, Manchester, United Kingdom, 114-121, 2010.
- [10] J.J. Monaghan, J.C. Lattanzio, *A refined particle method for astrophysical problems*, Astronomy & Astrophysics, 135-143, 1985.
- [11] J.J. Monaghan, *Simulating Free Surface Flows with SPH*, Journal of Computational Physics, 110, 399-406, 1994.
- [12] G. Petkovšek, *Uporaba metode SPH za dinamične simulacije tokov v hidromehaniki*, Zbornik del Kuhljevi dnevi, 151-158, 2010.
- [13] G. Petkovšek, E. Džebo, M. Četina, D. Žagar, *Application of Non-Discrete Boundaries with Friction to Smoothed Particle Hydrodynamics*, Journal of Mechanical Engineering 5, vol. 56, 307-315, 2010.
- [14] G. Petkovšek, E. Džebo, M. Četina, D. Žagar, *Simulacija laboratorijske porušitve pregrade po metodi SPH z analizo modela trenja*, Zbornik del Kuhljevi dnevi, 159-166, 2010.
- [15] M. Prakash, F. Debroux, P. Cleary, *Three-dimensional modelling of dam break induced flows using Smoothed Particle Hydrodynamics*, 14th Australasian fluid Mechanic conference, Adelaide, 379-82, 2001.
- [16] V. Roubtsova, R. Kahawita, *The SPH technique applied to free surface flows*, Computers & Fluids 35, 1359-1371, 2006.
- [17] C. Tropea, A.L. Yarin, J.F. Foss, *Springer Handbook of Experimental Fluid Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- [18] C. Ulrich, T. Rung, *SPH Modelling of Water/Soil-Suspension Flows*, 5th International SPHERIC Workshop, Manchester, United Kingdom, 61-68, 2010.
- [19] Q. Yang, V. Jones, L.S. McCue, *Numerical Study on Fluid Structure Interaction Using Smoothed Particle Hydrodynamics and the Finite Element Method*, 5th International SPHERIC Workshop, Manchester, United Kingdom, 237-244, 2010.
- [20] D. Žagar, E. Džebo, M. Četina, G. Petkovšek, *Simulations of dam break and flow through a steep valley using SPH*, 33rd IAHR Congress, 2009.



Eksperimentalno in numerično raziskovanje nestacionarnega tokovnega polja okoli osamljenega krila

M. Fike¹, G. Bombek¹ in A. Hribernik¹

Experimental and numerical investigation of unsteady field around an isolated airfoil

Povzetek. V članku je predstavljena raziskava vpliva turbulentnega modela na izračunano tokovno polje osamljenega krila v majhnem vetrovniku. Medsebojno so bili primerjani numerični in eksperimentalni rezultati preko točke odcepitve, tlačnega poteka po krilu in tokovnega polja vključno z oscilacijami hitrosti pri obtekanju. Eksperimentalni podatki so bili zajeti s pomočjo tlačnih senzorjev in PIV (Particle Image Velocimetry) merilnega sistema. Raziskava je bila opravljena za različne napadne kote.

Abstract. A study was performed to analyse the influence of a turbulent model on the flow-field and integral characteristics of an isolated airfoil within a small wind-tunnel, and to find the most suitable turbulent model. The selection was made by a comparison of the numerical and experimental results for flow separation point position, the airfoil pressure-distribution on the airfoil, and the velocity profile including velocity oscillations. The experimental results were acquired using pressure sensors and PIV (Particle Image Velocimetry). The study was performed at various angles of attack (AOA).

1 Uvod

Analizirati želimo dogajanje v ventilatorju v širšem področju delovanja in raziskati uporabnost numeričnih simulacij, še posebej pri delovanju ventilatorja v nestabilnem področju. V takšnem področju delovanja ventilatorja prihaja do kompleksnih pojavov pri obtekanju rotorskih lopatic, kar se odraža v zmanjšani tlačni razliki in nestacionarnem delovanju ventilatorja. Zmanjševanje masnega pretoka skozi aksialni ventilator se odraža v spremenjenem natočnem kotu, ki vpliva na povečanje napadnega kota, kar vodi do odcepitve toka na sesalni strani. Dogajanje pri obtekanju lopatic aksialnega ventilatorja je moč primerjati z dogajanjem pri obtekanju osamljenega krila. Poznano je, da do odcepljanja toka od lopatice v turbulentni mejni plasti ne prihaja v eni in isti točki ampak se točka odcepljanja spreminja s časom in zajema cel spekter pozicij (Simson [5]). Nishimura and Taniike [3] sta

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

dokazala, da je točka odcepljanja toka povezana oziroma usklajena z nihanjem koeficienta vzgona in da je frekvenca nihanja točke odcepljanja enaka von Karmanovi nestabilnosti.

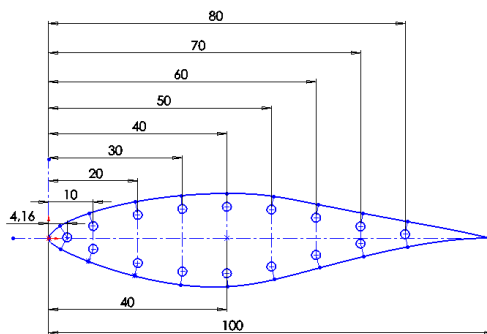
Eksperimentalna analiza teh pojavov je zahtevna. Prav tako so zelo zahtevne oziroma časovno potratne časovno odvisne numerične simulacije delovanja ventilatorju v področju nestabilnega delovanja. Na rezultate numeričnih simulacij pomembno vpliva izbira turbulentnega modela. Zato smo raziskali vpliv turbulentnega modela na napoved tokovnega polja in integralnih karakteristik v primeru obtekanja na osamljenemu krilu.

V prispevku je prikazana primerjava rezultatov numeričnih simulacij in meritev obtekanja profila. Pri numeričnih simulacijah je poudarek na izbiri turbulentnega modela. Pri eksperimentalnem delu pa na snemanju tokovnih polj pri obtekanju osamljenega profila in obdelavi podatkov.

2 Opis eksperimenta

2.1 Vetrovnik

Analizirano je bilo obtekanje profila S809. To je profil, ki se uporablja na vetrnih turbinah zaradi ugodnih aerodinamičnih lastnosti, oziroma ugodnega razmerja med koeficientom vzgona in upora. Obtekanje krila smo analizirali v majhnem vetrovniku dimenzije 200 mm x 200 mm. Maksimalna hitrost, ki jo lahko dosežemo v vetrovniku je omejena 36,3 m/s. Turbulentna intenzivnost znaša 1,5 %. Velikost preučevanega krila oziroma dolžino tetive smo prilagodili velikosti vetrovnika in možnosti zajemanja tlaka vzdolž profila. Tako je bilo s pomočjo tehnike hitre izdelave prototipov izdelano krilo s dolžino tetive 100 mm. Izstopna stran kanala vetrovnika je podaljšana s kanalom iz pleksi stekla, tako da je bilo omogočeno merjenje tokovnih polj s PIV merilno metodo. Krilo je bilo na obeh straneh pritrjeno na krožni plošči, ki sta bili vstavljeni v pripravljeni krožni odprtini v kanalu. Takšna pritrditev lopatice je omogočala enostavno spremembo napadnega kota. Dolžina tetive krila in vstopna hitrost definirata Reynoldsovo število. Meritve so bile izvedene za $Re=2 \times 10^5$.



Slika 1: Geometrija lopatice in merilna mesta

Na omenjenem krilu je bilo predvideno merjenje tlaka v 16 merilnih točkah. Pozicije merilnih mest so razvidne iz slike 1. Merilna mesta zajema tlaka so bila s plastičnimi cevmi povezana s tlačnimi senzorji. Povprečna dolžina cevi je bila 5 cm. Sinusoidna odzivnost merilnega sistema sestavljenega iz povezovalnih cevi in tlačnih senzorjev je bila ustrezna

(Chapin [1]). Zajem tlaka je bil izveden z različnimi tlačnimi senzorji, merilna negotovost senzorjev je bila od 0,5 Pa (GMSD 2,5MR) do 5 Pa (GMSD 25MR). Signali s tlačnih senzorjev so bili zajemani 10 s z frekvenco vzorčenja 1000 Hz.

2.2 PIV merilni sistem

PIV merilni sistem je bil uporabljen za merjenje tokovnih hitrostnih polj obtekanja krila. Merilna ravnina, ki je bila na sredini krila, je bila osvetljena z dvovotlinskim pulznim laserjem Nd:YAG. Meritev je bila izvedena na višjem nivoju delovanja laserja, kjer je energija vsakega pulza 50mJ. Snemanje tokovnih polj je potekalo z frekvenco 4 Hz. Za osemenjevanje toka je bil uporabljen generator megle. Povprečen premer sledilnih delcev je znašal 1 μ m. Laser za osvetljevanje merilne ravnine je bil postavljen v smeri toka približno meter za krilom. CCD kamera z resolucijo 1280x1024 svetlobno občutljivih celic je bila postavljena pravokotno na merilno ravnino. Oddaljenost kamere od merilne ravnine in nastavitve objektiva sta bila takšna, da je bila fizična velikost merilnega okna približno 120 x 100 mm. Čas med dvema pulzoma laserske ravnine oziroma med dvojnima PIV posnetkoma je bil 20 μ s. Pri obdelavi posnetkov so bili le ti razdeljeni na korelacijska podobmočja velikosti 32 x 32. Za izračun vektorjev hitrosti je bila uporabljena metoda križne in adaptivne korelacije s 25% prekrivanjem.

S PIV merilno metodo so bile izvedene meritve obtekanja krila pri petih različnih napadnih kotih od 0,7 °, 5,1 °, 9,6 °, 15,1 ° do 20,0 °.

2.3 Numerične simulacije

Z 2D simulacijami smo analizirali obtekanje krila. Simulirali smo obtekanje krila za enako geometrijo in pri enakih napadnih kotih kot so bile izvedene meritve. Rezultate numeričnih simulacij smo primerjali z rezultati meritev. Izvedene so bile stacionarne in časovno odvisne simulacije. Analiziran je vpliv turbulentnega modela na rezultate in na ujemanje z meritvami. Pri analizi vpliva turbulentnega modela pri stacionarnih izračunih smo se omejili na $k-\epsilon$ in SST turbulenten model. Numerične simulacije so bile izvedene s CFX kodo. Za shemo časovnih korakov je bila uporabljena Eulerjeva shema drugega reda. Konvergenčni kriterij je bil dosežen, ko so RMS ostanki bili manjši od 10^{-6} oziroma ko se koeficienta vzgona in upora nista več spreminjala. Simulacije obtekanja z uporabljenim SST turbulentnim modelom zahtevajo gosto mrežo, zato smo izdelali numerične mreže, ki ustrezajo pogoju $y^+ < 1$. V primeru uporabe $k-\epsilon$ modela moramo zadostiti pogoju $y^+ > 30$. Ker smo uporabili prilagodljive stenske funkcije (angl.: *scalable wall function*) smo lahko testirali $k-\epsilon$ model na enaki numerični mreži kot za SST turbulentni model. Numerične mreže smo izdelali z ICEM-CFD programskim orodjem za izdelavo numeričnih mrež. Za vsak preučevan napadni kot je bila izdelana blok strukturirana C-tip mreža z 119000 vozlišči. Simulirano območje je bilo 2 dolžini tetive pred lopatico, 5 dolžin tetive za lopatico, višina kanala je bila enaka dejanski višini, to je dvema dolžinama tetive lopatice. Na stenah je bil uporabljen robni pogoj stena brez zdrs, na vstopu je bila predpisana konstantna hitrost, na izstopu je bil predpisan statični tlak.

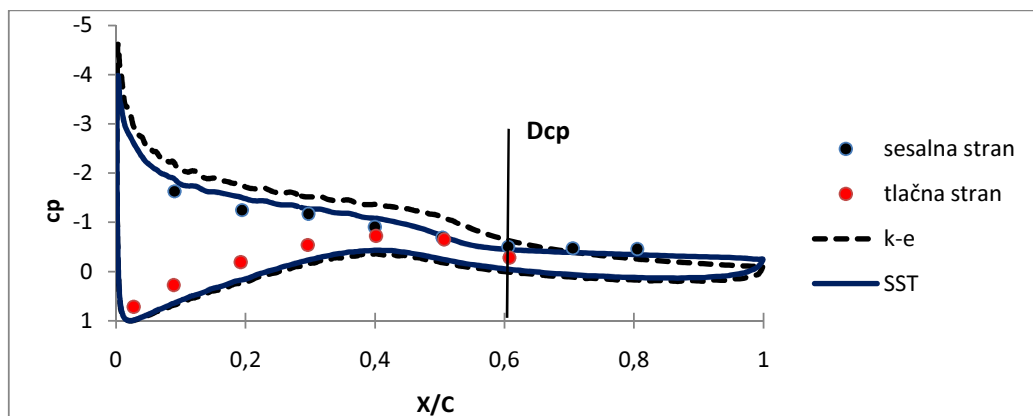
3 Rezultati

S povečevanjem napadnega kota se na sesalni strani lopatice pojavi vrtinec (angl.: *stall*), ki je posledica odcepljanja toka oziroma pozitivnega tlačnega gradienta. Za pravilno napoved

aerodinamičnih karakteristik lopatice v teh razmerah je potrebno pravilno napovedati točko odcepljanja in velikost odcepljanja, ki je posledica pozitivnega tlačnega gradienta. V primeru obtekanja lopatice brez odcepljanja (pri manjših napadnih kotih), najbolj razširjen in najbolj uporabljen turbulentni model $k-\varepsilon$ dokaj pravilno napove rezultate. Slabost $k-\varepsilon$ modela je, da v primeru odcepljanja, ki je posledica pozitivnega tlačnega gradienta, ne upošteva transporta strižnih napetosti, kar se odraža v prenapovedovanju vrtnične viskoznosti in posledično nepravilni napovedi točke odcepljanja in velikosti območja odcepljanja. Menter [2] je leta 1994 razvil SST turbulentni model, ki v večjem delu rešuje slabosti $k-\varepsilon$ modela. V primerjavi s $k-\varepsilon$ modelom je za SST model značilno, da dokaj pravilno napove začetno točko odcepljanja in področje odcepljanja, ki je posledica pozitivnega tlačnega gradienta, še vedno pa ne napove pravilno laminarnega odcepljanja na lopatici.

Na splošno je znano, da se laminarna mejna plast hitreje odcepi v primerjavi s turbulentno mejno plastjo. Napačna napoved točke odcepljanja se odraža v zmanjšanju oziroma povečanju področja odcepljenega toka in posledično v napačni napovedi aerodinamičnih karakteristik.

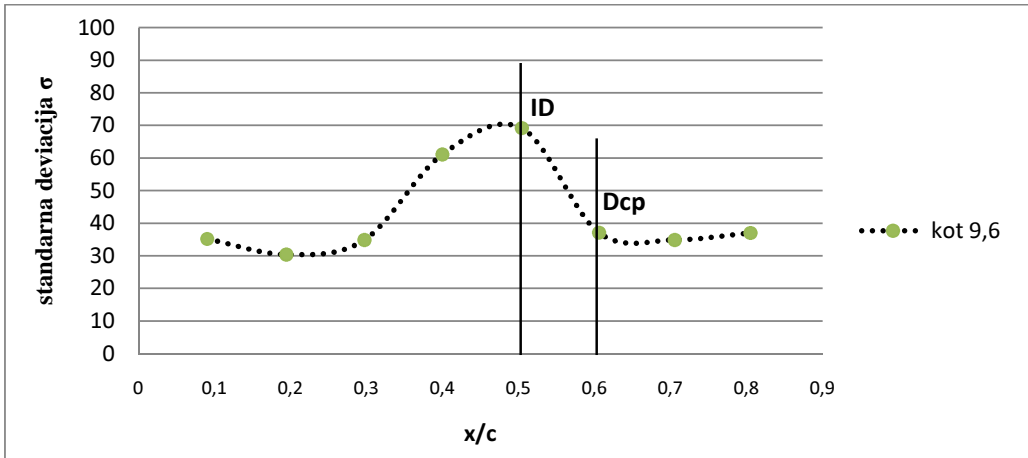
Z namenom preučevanja pojava odcepljanja so bili izmerjeni tlačni poteki po profilu krila za vse preučevane napadne kote. Slika 2 prikazuje primerjavo med eksperimentalnimi in numeričnimi rezultati poteka tlaka za napadni kot $9,6^\circ$. Iz slike je razvidno, da numerične simulacije zadovoljivo dobro napovejo potek tlaka, ne pa tudi absolutnih vrednosti. Vidne so tudi razlike med različnimi turbulentnimi modeli. Turbulentni model $k-\varepsilon$ napove večji podtlak na sesalni strani profila in kasnejšo odcepitev toka, kar se odraža v prenapovedovanju koeficienta vzgona. Iz poteka tlaka vzdolž profila krila sicer lahko ocenimo položaj točke za katero je tok stalno odcepljen in tudi velikost področja odcepljanja kot je razloženo v nadaljevanju, ne moremo pa določiti, kako se točka premika.



Slika 2: Potek tlakov (napadni kot $9,6^\circ$)

Skladno s Sicutom [4] je možno pojav odcepljanja analizirati s uporabo statistične analize tlačnih signalov v merilnih točkah po profilu lopatice. Standardna deviacija je kazalec nihanja tlaka in na podlagi izračunane standardne deviacije tlaka v merilnih točkah na sesalni strani profila je bila določena začetna točka odcepljanja. Nihanje tlaka je namreč povezano s premikanjem začetne točke odcepljanja. Diagram poteka standardne deviacije toka vzdolž profila (slika 3) ima v primeru, ko nastopi odcepitev toka dve karakteristični točki. Prvo

karakteristično mesto Dcp je točka za katero je tok ves čas odcepljen. Na diagramu poteka tlaka po profilu krila (slika 2) je to točka, kjer se začne področje konstantnega tlaka. To točko lahko prikažemo tudi na diagramu poteka standardne deviacije (slika 3) in kot vidimo ustreza mestu ustalitve standarde deviacije. Druga karakteristična točka ID je na mestu, kjer ima standardna deviacija lokalni maksimum. To mesto ponazarja področje kjer se izmenjuje polno obtekanje profila in odcepljanje toka. Posledica tega izmenjevanja je maksimalna vrednost standardne deviacije. Velikost področja med obema karakterističnima točkama odgovarja področju pojavljanja začetne točke odcepljanja. Iz slike 2 je razvidno, da je točka Dcp za napadni kot $9,6^\circ$ pri $x/c=0,6$.



Slika 3: Določitev točke odcepljanja na podlagi standardne deviacije tlaka vzdolž profila

Rezultati analize diagramov standardne deviacije toka vzdolž profila so zbrani v tabeli 1. Iz tabele je razvidno, da se točka odcepljanja s povečevanjem napadnega toka premika proti vstopnemu robu krila. Za napadni kot $15,1^\circ$ se področje stalno odcepljenega toka začne pred $x/c=0,5$. Odcepljanje toka pa se začne pred $x/c=0,3$. Točka odcepljanja toka torej potuje po področju $0,3 < x/c < 0,5$. Za napadni kot $9,6^\circ$ je področje med $0,5 < x/c < 0,6$. Pri napadnih kotih $5,1^\circ$ in $0,7^\circ$ odcepljanje toka ni bilo zaznано. Pri napadnem kotu $20,0^\circ$ sta obe karakteristični točki pred $x/c=0,1$. Natančnost določitve področja odcepljanja toka je enaka razdalji med merilnima mestoma.

Rezultate ocene področja odcepljanja toka smo primerjali z rezultati numeričnih simulacij. Primerjava je prikazana v tabeli 1.

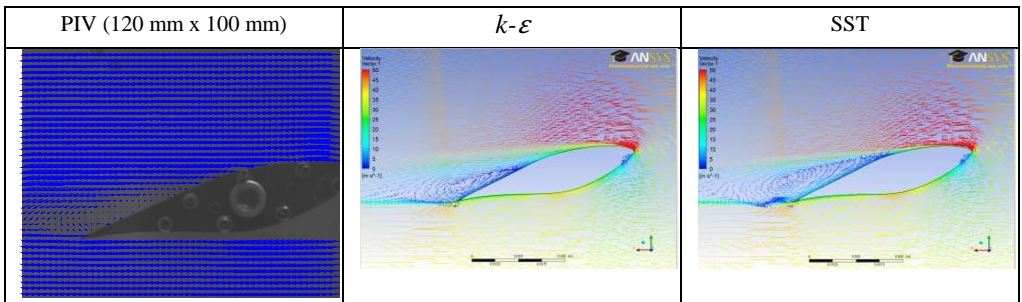
Tabela 1: Položaj točke Dcp in ID [x/c]

	napadni kot				
	$0,7^\circ$	$5,1^\circ$	$9,6^\circ$	$15,1^\circ$	$20,0^\circ$
Steady k-e (Dcp)	Brez odcepitve	Brez odcepitve	Brez odcepitve	0,63	0,37
Steady SST (Dcp)	Brez odcepitve	0,92	0,53	0,42	Ne konvergira
Transient SST (Dcp)	/	/	/	/	0,01
Meritev tlaka (Dcp)	Brez odcepitve	Brez odcepitve	0,6	0,5	0,1
Meritev tlaka (ID)	Brez odcepitve	Brez odcepitve	0,5	0,3	<0,1

Tako kot meritve tudi rezultati numeričnih simulacij obtekanja krila pri napadnem kotu $0,7^\circ$ ne pokažejo odcepljanja toka. Pri napadnem kotu $5,1^\circ$ pa se rezultati numeričnih simulacij z uporabljenima $k-\varepsilon$ in SST turbulentnima modeloma razlikujejo. $k-\varepsilon$ model ne napove odcepitve toka za razliko od SST modela, kjer se na izstopnem robu pojavi majhen vrtinec, ki je posledica odcepitve. Rezultati simulacij se pri napadnem kotu $9,6^\circ$ še bolj razlikujejo. $k-\varepsilon$ model tudi pri tem napadnem kotu ne napove odcepitve toka. Napove pa področje zmanjšanja hitrosti obtekanja. SST model napove točko odcepitve toka pri $x/c=0,53$. Razlike opazimo tudi pri napadnem kotu $15,1^\circ$, kjer turbulentni model $k-\varepsilon$ napove začetek stalno odcepljenega toka pri $x/c=0,63$, dočim SST turbulentni model napove pri $x/c=0,42$. Pri napadnem kotu $20,0^\circ$ stacionarni izračun s uporabljenim $k-\varepsilon$ turbulentnim modelom napovedal točko stalno odcepljenega toka pri $x/c=0,37$. Stacionarni izračun s SST modelom ni konvergirал in tudi koeficient vzgona se ni ustalil, ampak je nihal okoli srednje vrednosti. Zato je bila v tem primeru narejena časovna odvisna simulacija. Mreža in ostale nastavitve so bile enake kot v primeru stacionarnih simulacij. Časovni korak je bil nastavljen na $1,38e-5$ s. Izračun smo ustavili ko je koeficient vzgona začel periodično nihati okoli srednje vrednosti. Iz rezultatov numeričnih simulacij sta bili določeni točki začetka odlepljanja toka in točka konstantno odlepljenega toka. Začetna točka odcepljanja toka je pri točki $x/c=0,005$, točka stalno odcepljenega toka pa pri $x/c=0,01$.

Z meritvami tlakov vzdolž profila krila ne moremo analizirati velikosti področja oziroma velikosti vrtinca. Prav tako ničesar ne zremo o tokovnem polju. Zato smo uporabili tudi PIV merilno metodo, ki omogoča kvalitetnejšo primerjavo z numeričnimi simulacijami, saj omogoča snemanje 2D tokovnih polj in ne zgolj točkovnega merjenja. Istočasno smo s PIV merilno metodo preverili pravilnost določitve točke stalno odcepljenega toka z metodo analize standardne deviacije tlaka.

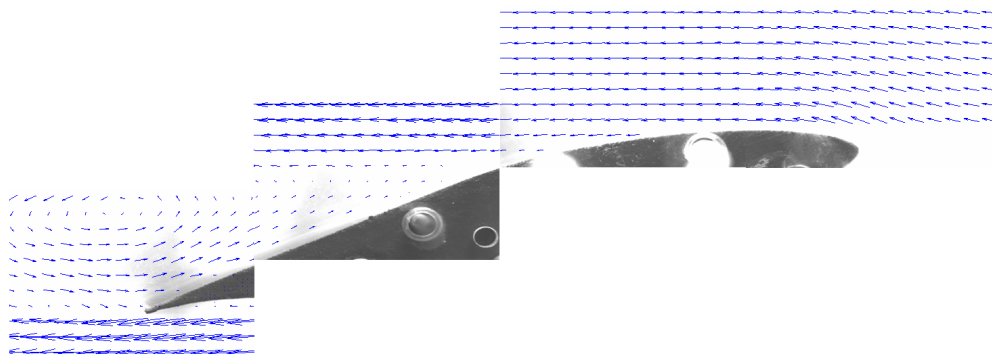
S PIV merilno metodo je bilo posneto obtekanje krila za vse preučevane napadne kote. Obstoječi PIV merilni sistem je za analiziranje časovno spreminjajočega tokovnega polja pri obtekanju krila prepočasen, zato je bilo posnetih 50 zaporednih posnetkov, na podlagi katerih so bila izračunana polja vektorjev hitrosti. Serija izračunanih vektorskih polj je bila statistično obdelana tako, da so bila dobljena polja časovno povprečenih vektorjev hitrosti, ki so bila nato primerjana z rezultati stacionarnih simulacij.



Slika 4: Primerjava eksperimentalnih povprečenih in numeričnih rezultatov pri napadnem kotu $15,1^\circ$.

Pri velikosti merilnega območja 120 mm x 100 mm, to je velikost, ki nam omogoča globalni vpogled v obtekanje lopatice, je točka odcepljenega toka težje določljiva. Zato smo spreminjali velikost okna zajemanja, oziroma oddaljenost kamere od merilne ravnine. Slika 5

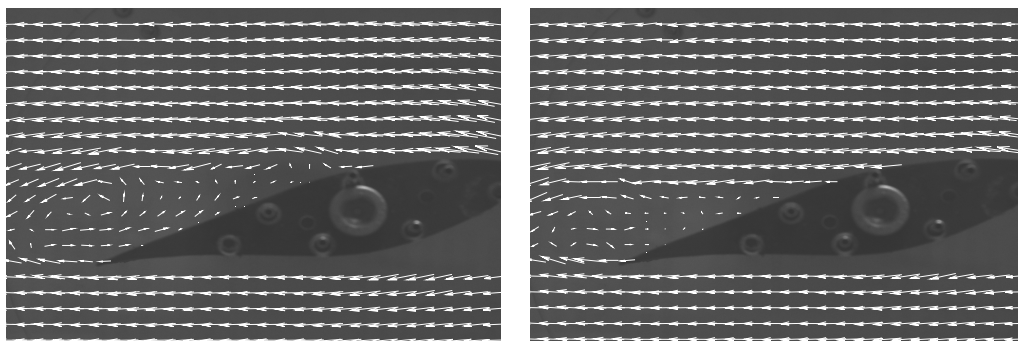
je tako sestavljena iz 4 časovno povprečenih tokovnih polj, velikost posameznega merilnega območja znaša 33 mm x 26,4 mm.



Slika 5: PIV meritve obtakanja za napadni kot $15,1^\circ$ (merilno okno 33 mm x 26,4 mm)

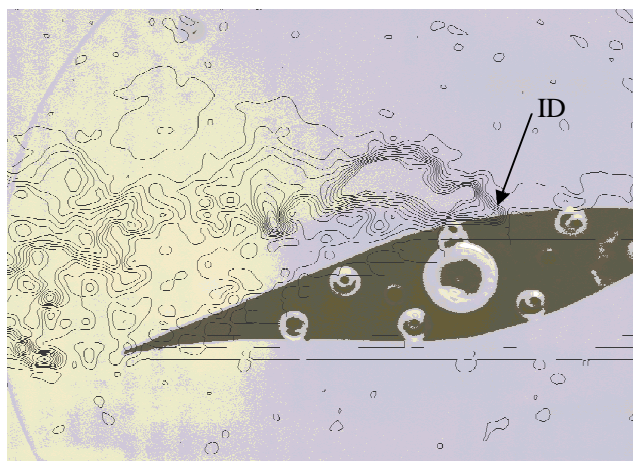
Primerjava med numeričnimi in eksperimentalnimi tokovnimi polji je prikazana na sliki 4. Boljše ujemanje z eksperimentalnimi rezultati dobimo s uporabo SST modela, ki v primerjavi s $k-\varepsilon$ modelom natančneje oziroma pravilneje napove področje odcepitve toka.

Na sliki 6 sta prikazani dve trenutni nepovprečeni PIV tokovni polji pri napadnem kot $15,1^\circ$. Primerjava trenutnih PIV tokovnih polj kaže, da dejansko obstaja nihanje točke odcepljanja na sesalni strani profila, ki se pojavlja med točkama ID in Dcp.



Slika 6: Trenutni tokovni polji pri napadnem kotu $15,1^\circ$

Prve in druge karakteristične točke ne moremo določiti na podlagi povprečenega tokovnega polja. Za določitev ID točke je uporabljena enaka ideja kot za določitev te točke preko časovno odvisnega zajemanja tlaka. Statistično je bilo obdelanih vseh 50 v seriji zajetih PIV posnetkov in tako je bilo izračunano polje standardne deviacije hitrosti. Analiza je pokazala, da položaj točke ID določen s pomočjo maksimuma standardne deviacije hitrosti sovпада s pozicijo določeno z tlačnimi meritvami. Slika 7 prikazuje konture standardne deviacije hitrosti v smeri glavnega toka za napadni kot $15,1^\circ$. Iz slike je razvidno, da je področje maksimalne standardne deviacije v bližini točke $x/c = 0,3$.



Slika 7: Konture standardne deviacije hitrosti v smeri glavnega toka pri napadnem kotu $15,1^\circ$

4 Zaključek

Izvedena je bila primerjava rezultatov numeričnih simulacij z različnima turbulentnima modeloma z rezultati meritev obtekanja krila v kanalu. Pri eksperimentalnem delu so bili za preučevane napadne kote izmerjeni časovno odvisni poteki tlaka vzdolž profila in izračunane so bile standardne deviacije tlakov v merilnih točkah na podlagi česa sta bili določeni dve karakteristični točki, točka začetka odcepljanja toka ID in točka stalno odcepljenega toka Dcp. Izmerjeni poteki tlakov so bili primerjani s poteki dobljenimi z numeričnimi simulacijami. S PIV merilnim sistemom so bile zajete serije tokovnih polj, katere smo statistično obdelali in jih primerjali s stacionarnimi numeričnimi simulacijami. Izbrana turbulentna modela se razlikujeta v napovedi točke odcepitve, pri čemer se je SST turbulentni model izkazal za ustrežnejšega.

Literatura

- [1] Chapin, W. G. (1983). *Dynamic-pressure measurement using an electronically scanned pressure module*. NACA TM-84650.
- [2] Menter, F.R., *Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering Applications*. AIAA Journal, 32(8), 1598-1605, 1994.
- [3] Nishimura H., Taniike Y., *Aerodynamics characteristics of fluctuating forces on a circular cylinder*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics 89(7), 713–723, 2001.
- [4] Sicot C., Aubrun S., Loyer S., Devinan P., *Unsteady characteristics of the static stall of an airfoil subjected to freestream turbulence level up to 16%*. Experiments in Fluids 41, 641–648, 2006.
- [5] Simpson R.L., Chew Y.T., Shivaprasad B.G., *The structure of a separating turbulent boundary layer: part I, mean flow and Reynolds stresses; part II, higher order turbulence results*. The Journal of Fluid Mechanics 113, 23–73, 1981.



Odprava singularnosti interpolacijske matrike štirikotnega končnega elementa za tanke plošče

Rado Flajs¹ in Miran Saje²

Elimination of the singularity of the interpolation matrix of quadrilateral finite element for thin plates

Povzetek. V prispevku je predstavljen nov postopek, s katerim hkrati odpravimo singularnost in slabo pogojenost interpolacijske matrike štirikotnega končnega elementa RPQ4 za tanke plošče [6]. Dokaz konvergence in izpeljava standardne ocene napake tako izboljšanega končnega elementa sta povzeta iz [3].

Abstract. A new procedure to eliminate the singularity and ill conditioning of the interpolation matrix of quadrilateral finite element RPQ4 for thin plates [6] is presented. The convergence proof and the derived standard error estimate for the present improved finite element follow immediately from results in [3].

1 Uvod

V prispevku predstavljamo nov postopek, s katerim hkrati odpravimo singularnost in slabo pogojenost interpolacijske matrike štirikotnega končnega elementa RPQ4 za tanke plošče [6]. Hkrati s tem razvijemo novo izboljšano različico nekonformnega končnega elementa RPQ4. Ker je novi končni element tesno povezan s svojim predhodnikom RPQ4, moremo dokaz konvergence in standardno oceno napake povzeti neposredno iz [3].

2 Končni element RPQ4 za tanke plošče

Končni element RPQ4 je bil prvič predstavljen v delu [6]. Konvergenca končnega elementa je bila po zgledu [5] dokazana v prispevku [3], izboljšava samega elementa pa je bila podana v prispevku [4]. Ker se bomo v prispevku sklicevali na določene enačbe iz dela [6], bomo končni element RPQ4 najprej na kratko ponovno predstavili.

¹ rado.flajs@fgg.uni-lj.si, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Jamova 2, Ljubljana

² miran.saje@fgg.uni-lj.si, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Jamova 2, Ljubljana

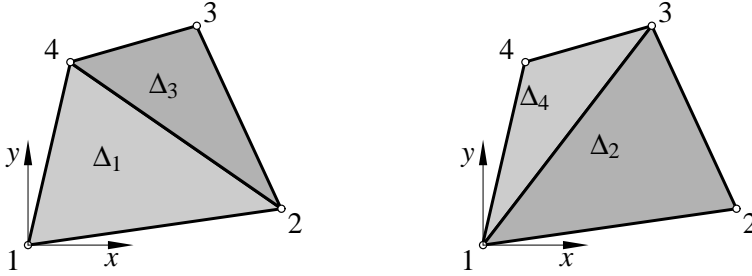
2.1 Geometrijska domena končnega elementa

S Q bomo označili konveksni (kot tudi nekonveksni) štirikotnik z robom ∂Q , s ploščino $|Q|$ in s komponentama zunanje normale n_x in n_y na robu ∂Q . Štirikotnik Q razdelimo preko telesnih diagonal na dva trikotnika. Možni delitvi prikazuje slika 1. Ploščine dobljenih trikotnikov označimo zaporedno z $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ in Δ_4 .

Zahteva 1. Označimo s h_Q premer poljubnega štirikotnika Q . Naj obstaja pozitivna konstanta c_1 , takšna, da bo za vse štirikotnike izpolnjena neenakost

$$\min(|\Delta_1|, |\Delta_2|, |\Delta_3|, |\Delta_4|) \geq c_1 h_Q^2. \quad (1)$$

Zanesljivo zahteve 1 ne izpolnijo trikotniki, kjer dve oglišči sovpadeta v eno in štirikotniki, pri katerih trojica izmed štirih oglišč leži na isti premici.



Slika 1 : Delitvi konveksnega štirikotnika na trikotnike

2.2 Interpolacijske oblikovne funkcije v_h in prostoste stopnje q_i

Ob uvedbi operatorjev $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$, ... in okrajšav

$$\mathbf{X} := [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^3y \quad xy^3]^T, \quad (2a)$$

$$\boldsymbol{\alpha} := [\alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_{12}]^T, \quad (2b)$$

$$\mathbf{q} := [w_h(x_1, y_1) \quad \partial_x w_h(x_1, y_1) \quad \partial_y w_h(x_1, y_1) \quad \dots \quad w_h(x_4, y_4) \quad \partial_x w_h(x_4, y_4) \quad \partial_y w_h(x_4, y_4)]^T, \quad (2c)$$

$$A := \begin{bmatrix} C(x_1, y_1) \\ \vdots \\ C(x_4, y_4) \end{bmatrix}, \quad (2d)$$

$$C(x, y) := \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & xy^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & 2xy & y^2 & 0 & 3x^2y & y^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 \end{bmatrix} \quad (2e)$$

lahko aproksimacijo v_h na Q po [6] zapišemo z nastavkom

$$v_h|_Q := w_h|_Q + \lambda_1 \frac{x^2}{2} + \lambda_2 \frac{y^2}{2} + \lambda_3 \frac{xy}{2} = w_h|_Q + \Lambda_Q = \mathbf{X}^T \boldsymbol{\alpha} + \Lambda_Q = \mathbf{X}^T A^{-1} \mathbf{q} + \Lambda_Q. \quad (3)$$

Konstante λ_1, λ_2 in λ_3 so določene z enačbami [6]

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} := \frac{1}{|Q|} \left(\int_{\partial Q} \left(\widetilde{\partial_n w_h} \begin{bmatrix} n_x^2 \\ n_y^2 \\ 2n_x n_y \end{bmatrix} + \widetilde{\partial_s w_h} \begin{bmatrix} -n_x n_y \\ n_x n_y \\ n_x^2 - n_y^2 \end{bmatrix} \right) ds - \int_Q \begin{bmatrix} \partial_{xx} w_h \\ \partial_{yy} w_h \\ 2\partial_{xy} w_h \end{bmatrix} dx dy \right). \quad (4)$$

Funkciji $\widetilde{\partial_s w_h}$ in $\widetilde{\partial_n w_h}$ označujeta odsekoma linearno (ali parabolično) interpolacijo smernega odvoda in odseka linearno interpolacijo normalnega odvoda funkcije w_h na robu ∂Q . Določeni sta z robnimi vrednostmi $q_i, i = 1, \dots, 12$. S takšno izbiro konstant λ_1, λ_2 and λ_3 element avtomatično zadosti Ironsovemu patch testu [6]. Z V_h označimo prostor končnih elementov, $V_h|_Q \subset \mathbb{P}_3(Q) \oplus L\{x^3 y, x y^3\}$, z u_h aproksimacijo šibke rešitve, z u šibko rešitev variacijskega problema, z v poljubno funkcijo in z $W_2^m(Q) \equiv H^m(Q)$ prostore Soboljeva, opremljene z normami $\|\cdot\|_{m,2,Q} \equiv \|\cdot\|_{m,Q}$ in s polnormami $|\cdot|_{m,2,Q} \equiv |\cdot|_{m,Q}$ za $0 \leq m \leq 4$. Središče kartezičnega koordinatnega sistema (x, y) postavimo v težišče štirikotnika.

3 Izboljšana različica končnega elementa RPQ4

Ena od zahtev, ki jih mora končni element izpolnjevati, je zahteva po enolični rešljivosti ali unisolvantnosti [1, str. 100], ki pa bo izpolnjena natanko takrat, ko bo interpolacijska matrika A v enačbi (3) nesingularna. Izkaže se, da z enim samim vnaprej določenim interpolacijskim nastavkom (2a) tega v celoti ne moremo doseči. Determinanta matrike A je npr. enaka nič v primeru romba z oglišči $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ in $(0, 1)$. Zato bomo v nadaljevanju uporabili kar tri različne vnaprej določene interpolacijske nastavke (5a), (5b) in (5c) in tako v vseh primerih odpravili singularnost interpolacijske matrike A . Trije različni interpolacijski nastavki sicer privedejo do treh različnih nekonformnih končnih elementov, na red same konvergence pa nimajo neposrednega vpliva. Omeniti velja, da je odločitev o izbiri najbolj primerne interpolacijske nastavke odvisna samo od geometrije elementa, je preprosta in tako ne vpliva bistveno na porabljeni računski čas izračuna togostne matrike. Iz izrazov (11) izračunamo determinante in izberemo nastavek s po absolutni vrednosti največjo determinanto.

3.1 Interpolacijski nastavki za navpične pomike v kartezičnem koordinatnem sistemu (x, y)

Z uvedbo vektorja neznanih koeficientov interpolacijskega polinoma $\boldsymbol{\alpha}$ po enačbi (2b) in interpolacijskih vektorjev

$$\mathbf{X}_1(x, y) := [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2 y \ xy^2 \ y^3 \ x^3 y \ x^4]^T, \quad (5a)$$

$$\mathbf{X}_2(x, y) := [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2 y \ xy^2 \ y^3 \ y^3 x \ y^4]^T, \quad (5b)$$

$$\mathbf{X}_3(x, y) := [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2 y \ xy^2 \ y^3 \ x(y+x)^3 \ y(y+x)^3]^T \quad (5c)$$

tvorimo tri nove interpolacijske nastavke za navpične pomike tanke plošče

$$w_{h1}(x, y)|_Q := \mathbf{X}_1^T(x, y) \cdot \boldsymbol{\alpha}, \quad w_{h2}(x, y)|_Q := \mathbf{X}_2^T(x, y) \cdot \boldsymbol{\alpha} \quad \text{in} \quad w_{h3}(x, y)|_Q := \mathbf{X}_3^T(x, y) \cdot \boldsymbol{\alpha}. \quad (6)$$

3.2 Interpolacijske matrike A_i

Za vsako interpolacijo posebej po enačbah (2c), (2d) in (2e) določimo interpolacijsko matriko A_i , ($1 \leq i \leq 3$):

$$A_i = [\mathbf{X}_i(x_1, y_1) \quad \partial_x \mathbf{X}_i(x_1, y_1) \quad \partial_y \mathbf{X}_i(x_1, y_1) \quad \dots \quad \mathbf{X}_i(x_4, y_4) \quad \partial_x \mathbf{X}_i(x_4, y_4) \quad \partial_y \mathbf{X}_i(x_4, y_4)]^T. \quad (7)$$

Ker prvih deset členov v vektorjih (5) napenja bazo prostora \mathbb{P}_3 , zadnja dva člena pa sta vsebovana v prostoru \mathbb{P}_4 , so determinante interpolacijskih matrik A_i , ($1 \leq i \leq 3$) translacijsko invariantne. Zato lahko točko s koordinatama (x_1, y_1) premaknemo v koordinatno izhodišče, t.j. v $(x_1 = 0, y_1 = 0)$ (glej sliko 1).

Uvedemo okrajšave $z_2 := x_2 + y_2$, $z_3 := x_3 + y_3$ in $z_4 := x_4 + y_4$. Upoštevamo nastavke (5a), (5b), (5c) in (7). Krajši račun vrne

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & x_2^3 & x_2^2 y_2 & x_2 y_2^2 & y_2^3 & x_2^3 y_2 & x_2^4 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_2 & y_2 & 0 & 3x_2^2 & 2x_2 y_2 & y_2^2 & 0 & 3x_2^2 y_2 & 4x_2^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_2 & 2y_2 & 0 & x_2^2 & 2x_2 y_2 & 3y_2^2 & x_2^3 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 & x_3^3 & x_3^2 y_3 & x_3 y_3^2 & y_3^3 & x_3^3 y_3 & x_3^4 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_3 & y_3 & 0 & 3x_3^2 & 2x_3 y_3 & y_3^2 & 0 & 3x_3^2 y_3 & 4x_3^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 & 2y_3 & 0 & x_3^2 & 2x_3 y_3 & 3y_3^2 & x_3^3 & 0 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 & x_4^3 & x_4^2 y_4 & x_4 y_4^2 & y_4^3 & x_4^3 y_4 & x_4^4 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_4 & y_4 & 0 & 3x_4^2 & 2x_4 y_4 & y_4^2 & 0 & 3x_4^2 y_4 & 4x_4^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_4 & 2y_4 & 0 & x_4^2 & 2x_4 y_4 & 3y_4^2 & x_4^3 & 0 \end{bmatrix}, \quad (8a)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & x_2^3 & x_2^2 y_2 & x_2 y_2^2 & y_2^3 & x_2 y_2^3 & y_2^4 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_2 & y_2 & 0 & 3x_2^2 & 2x_2 y_2 & y_2^2 & 0 & y_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_2 & 2y_2 & 0 & x_2^2 & 2x_2 y_2 & 3y_2^2 & 3x_2 y_2^2 & 4y_2^3 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 & x_3^3 & x_3^2 y_3 & x_3 y_3^2 & y_3^3 & x_3 y_3^3 & y_3^4 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_3 & y_3 & 0 & 3x_3^2 & 2x_3 y_3 & y_3^2 & 0 & y_3^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 & 2y_3 & 0 & x_3^2 & 2x_3 y_3 & 3y_3^2 & 3x_3 y_3^2 & 4y_3^3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 & x_4^3 & x_4^2 y_4 & x_4 y_4^2 & y_4^3 & x_4 y_4^3 & y_4^4 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_4 & y_4 & 0 & 3x_4^2 & 2x_4 y_4 & y_4^2 & 0 & y_4^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_4 & 2y_4 & 0 & x_4^2 & 2x_4 y_4 & 3y_4^2 & 3x_4 y_4^2 & 4y_4^3 \end{bmatrix}, \quad (8b)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & x_2^3 & x_2^2 y_2 & x_2 y_2^2 & y_2^3 & x_2 z_2^3 & y_2 z_2^3 & \\ 0 & 1 & 0 & 2x_2 & y_2 & 0 & 3x_2^2 & 2x_2 y_2 & y_2^2 & 0 & (y_2 + 4x_2) z_2^2 & 3y_2 z_2^2 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_2 & 2y_2 & 0 & x_2^2 & 2x_2 y_2 & 3y_2^2 & 3x_2 z_2^2 & (4y_2 + x_2) z_2^2 & \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 & x_3^3 & x_3^2 y_3 & x_3 y_3^2 & y_3^3 & x_3 z_3^3 & y_3 z_3^3 & \\ 0 & 1 & 0 & 2x_3 & y_3 & 0 & 3x_3^2 & 2x_3 y_3 & y_3^2 & 0 & (y_3 + 4x_3) z_3^2 & 3y_3 z_3^2 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 & 2y_3 & 0 & x_3^2 & 2x_3 y_3 & 3y_3^2 & 3x_3 z_3^2 & (4y_3 + x_3) z_3^2 & \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 & x_4^3 & x_4^2 y_4 & x_4 y_4^2 & y_4^3 & x_4 z_4^3 & y_4 z_4^3 & \\ 0 & 1 & 0 & 2x_4 & y_4 & 0 & 3x_4^2 & 2x_4 y_4 & y_4^2 & 0 & (y_4 + 4x_4) z_4^2 & 3y_4 z_4^2 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_4 & 2y_4 & 0 & x_4^2 & 2x_4 y_4 & 3y_4^2 & 3x_4 z_4^2 & (4y_4 + x_4) z_4^2 & \end{bmatrix}. \quad (8c)$$

3.3 Determinante interpolacijskih matrik A_i

Z upoštevanjem slike 1 lahko neposredno preverimo veljavnost enačb

$$(x_2 y_3 - x_3 y_2) = 2\Delta_2, \quad (9a)$$

$$(x_4 y_2 - x_2 y_4) = -2\Delta_1, \quad (9b)$$

$$(x_3 y_4 - x_4 y_3) = 2\Delta_4, \quad (9c)$$

$$\begin{aligned} (x_3 y_4 - x_2 y_4 - x_4 y_3 + x_2 y_3 + x_4 y_2 - x_3 y_2) &= (x_3 y_4 - x_4 y_3) + (x_4 y_2 - x_2 y_4) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) \\ &= 2(\Delta_4 - \Delta_1 + \Delta_2) = 2\Delta_3. \end{aligned} \quad (9d)$$

Z uporabo wxMaxime ali Mathematice in ob uvedbi okrajšav

$$F_A := -16\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4, \quad (10a)$$

$$F_{XY} := 2(x_2 y_2 \Delta_4 - x_3 y_3 \Delta_1 + x_4 y_4 \Delta_2), \quad (10b)$$

$$F_X := 2(x_2^2 \Delta_4 - x_3^2 \Delta_1 + x_4^2 \Delta_2), \quad (10c)$$

$$F_Y := 2(y_2^2 \Delta_4 - y_3^2 \Delta_1 + y_4^2 \Delta_2) \quad (10d)$$

lahko determinante matrik A_i zapišemo z izrazi

$$D_1 := |A_1| = F_A F_X^3, \quad (11a)$$

$$D_2 := |A_2| = -F_A F_Y^3, \quad (11b)$$

$$D_3 := |A_3| = -F_A (F_X + F_Y + 2F_{XY})^3. \quad (11c)$$

3.4 Odprava singularnosti matrike A

Ker je koeficient F_A zaradi zahteve 1 različen od nič, bodo vse determinante v enačbah (11) enake nič samo v primeru, ko bodo vsi faktorji F_X , F_Y in F_{XY} hkrati enaki nič. Pokazali bomo, da se to ne more zgoditi.

Dokaz. Enačbe (10b), (10c) in (10d) zapišemo v matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} x_2 y_2 & -x_3 y_3 & x_4 y_4 \\ x_2^2 & -x_3^2 & x_4^2 \\ y_2^2 & -y_3^2 & y_4^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_4 \\ \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} F_{XY} \\ F_X \\ F_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Ker je determinanta matrike gornjega sistema enačb enaka $-\Delta_1 \Delta_2 \Delta_4 \neq 0$, ima sistem enačb natanko eno rešitev $\Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0, \Delta_4 = 0$, kar pa je seveda v protislovju z zahtevo 1. Kaj pa v primeru nekonveksnega štirikotnika Q ? Koeficient F_A kot tudi determinanta gornje matrike sta zaradi zahteve 1 različna od nič in gornji razmislek velja tudi v tem primeru. \square

3.5 Primeri, ko sta dve od treh determinant enaki nič

- $D_1 = D_2 = 0$: Kvadrat z oglišči $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$ in $(0, 1)$.
- $D_1 = D_3 = 0$: Konveksni štirikotnik z oglišči $(0, 0), (-1, 0), (-3, -3)$ in $(6, -21)$.
- $D_2 = D_3 = 0$: Konveksni štirikotnik z oglišči $(0, 0), (-21, 6), (-3, -3)$ in $(0, -1)$.

3.6 Odprava slabe pogojenosti matrike A

Z izbiro treh različnih interpolacijskih nastavkov moremo izboljšati tudi pogojenost togostne matrike končnega elementa. Determinante matrik (11) ne morejo biti hkrati enake nič. Predpostavimo, da so vse tri hkrati poljubno majhne. Pokazali bomo, da tudi to ni mogoče, ker je vsaj ena od determinant navzdol omejena z normo vektorja $\Delta := [\Delta_4 \ \Delta_1 \ \Delta_2]^T$.

V enačbi (12) spremenimo desno stran:

$$\begin{bmatrix} x_2 y_2 & -x_3 y_3 & x_4 y_4 \\ x_2^2 & -x_3^2 & x_4^2 \\ y_2^2 & -y_3^2 & y_4^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_4 \\ \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} F_{XY} \\ F_X \\ F_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{xy} \\ \delta_x \\ \delta_y \end{bmatrix} \quad (13)$$

Enačbo (13) prepišemo v obliko

$$B\Delta = \delta. \quad (13')$$

Ker je matrika B obrnljiva, lahko pišemo

$$B^{-1}\delta = \Delta. \quad (14)$$

Ocenimo desno stran

$$\|\Delta\| \leq \|B^{-1}\| \|\delta\| \quad (15)$$

in izpeljemo neenakost

$$\|\delta\| \geq \frac{\|\Delta\|}{\|B^{-1}\|}, \quad (16)$$

kot poseben primer neenakosti (2.3) [2, str. 50]. V oceni (16) lahko uporabimo Frobeniusovo normo matrike $\|B\| := \sqrt{\sum |b_{ij}|^2}$. Izračunamo inverz matrike B

$$B^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -\frac{x_3 y_4 + x_4 y_3}{\Delta_1 \Delta_2} & \frac{y_3 y_4}{y_2 y_4} & \frac{x_3 x_4}{x_2 x_4} \\ \frac{\Delta_1 \Delta_2}{x_2 y_4 + x_4 y_2} & \frac{\Delta_1 \Delta_2}{y_2 y_4} & \frac{\Delta_1 \Delta_2}{x_2 x_4} \\ -\frac{\Delta_2 \Delta_4}{x_2 y_3 + x_3 y_2} & \frac{\Delta_2 \Delta_4}{y_2 y_3} & \frac{\Delta_2 \Delta_4}{x_2 x_3} \\ -\frac{\Delta_1 \Delta_4}{\Delta_1 \Delta_4} & \frac{\Delta_1 \Delta_4}{\Delta_1 \Delta_4} & \frac{\Delta_1 \Delta_4}{\Delta_1 \Delta_4} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Z uporabo ocene vsote

$$\begin{aligned} (x_3 y_4 + x_4 y_3)^2 + (y_3 y_4)^2 + (x_3 x_4)^2 &= 2x_3 y_3 x_4 y_4 + (x_3^2 + y_3^2) (x_4^2 + y_4^2) \\ &\leq \frac{3}{2} (x_3^2 + y_3^2) (x_4^2 + y_4^2) = \frac{3}{2} L_3^2 L_4^2, \end{aligned} \quad (18)$$

kjer smo z L_3 in L_4 označili dolžini robov 13 in 14, in zahteve 1 izpeljemo tudi oceno norme inverza (17)

$$\begin{aligned} \|B^{-1}\| &\leq \sqrt{\frac{3}{32}} \sqrt{\left(\frac{L_3^2 L_4^2}{\Delta_1 \Delta_2}\right)^2 + \left(\frac{L_2^2 L_4^2}{\Delta_2 \Delta_4}\right)^2 + \left(\frac{L_2^2 L_3^2}{\Delta_1 \Delta_4}\right)^2} \\ &\leq \sqrt{\frac{3}{32}} h_Q^4 \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta_1 \Delta_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta_2 \Delta_4}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta_1 \Delta_4}\right)^2} \\ &\leq \sqrt{\frac{3}{32}} h_Q^4 \sqrt{3 \frac{1}{(c_1^2 h_Q^4)^2}} \leq c_1^{-2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Iz neenakosti (16) in (19) sledi iskana neeenakost

$$\|\delta\| \geq \frac{\|\Delta\|}{\|B^{-1}\|} \geq c_1^2 \|\Delta\|. \quad (20)$$

4 Dokaz konvergence izboljšane različice elementa RPQ4 in ocena napake

Dokaz konvergence izboljšane različice elementa RPQ4 in oceno napake moremo izpeljati na podoben način kot v prispevku [3]. Tule bomo navedli samo rezultate.

4.1 Robni problem

Podobno kot v prispevku [3] obravnavamo robni problem vpete tanke plošče. Iščemo šibko rešitev u robnega problema na konveksnem poligonalnem območju Ω

$$\begin{aligned} a(u, v) &= f(v), \quad u, v \in V = H_0^2(\Omega), \\ a(u, v) &= \int_{\Omega} (\Delta u \Delta v + (1 - \sigma)(2\partial_{xy} u \partial_{xy} v - \partial_{xx} u \partial_{yy} v - \partial_{yy} u \partial_{xx} v)) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} (\sigma \Delta u \Delta v + (1 - \sigma)(2\partial_{xy} u \partial_{xy} v + \partial_{xx} u \partial_{xx} v + \partial_{yy} u \partial_{yy} v)) \, d\mathbf{x}, \\ f(v) &= \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}, \quad f \in L^2(\Omega), \\ \sigma &= \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad \text{kjer sta } \lambda \text{ in } \mu \text{ znani Lamjevi konstanti materiala.} \end{aligned}$$

Po metodi nekonformnih končnih elementov šibko rešitev u aproksimiramo z u_h , rešitvijo enačbe

$$\begin{aligned} a_h(u_h, v_h) &= f(v_h), \quad u_h, v_h \in V_h \\ a_h(u_h, v_h) &= \sum_{Q \in Q_h} \int_Q (\sigma \Delta u_h \Delta v_h + (1 - \sigma)(2\partial_{xy} u_h \partial_{xy} v_h + \partial_{xx} u_h \partial_{xx} v_h + \partial_{yy} u_h \partial_{yy} v_h)) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

4.2 Konvergenca in ocena napake

Naj h označuje največji premer štirikotnika izmed vseh štirikotnikov iz kvazi-enakomerne delitve Q_h . S c_2 in c_3 označimo konstanti, neodvisni od premera h . Če privzamemo drugo Strangovo lemo [1] in uporabimo rezultate iz [3], lahko pokažemo, da velja ocena

$$\|u - u_h\|_{2,h} \leq c_2 \left(\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{2,h} + \sup_{v_h \in V_h} \frac{|(f, v_h) - a_h(u, v_h)|}{\|v_h\|_{2,h}} \right) \leq c_3 |u|_{4,\Omega} h. \quad (21)$$

Ocena pove, da pada napaka v energijski normi pri vsakem $u \in H^4(\Omega)$ vsaj linearno s h .

5 Zaključek

V prispevku je predstavljen preprost postopek, s katerim odpravimo singularnost interpolacijske matrike A . Postopek sicer privede do družine treh različnih nekonformnih končnih elementov, ki pa so si sorodni med seboj, tako da je red konvergence za vse elemente enak. Odločitev o izbiri ustreznega končnega elementa računskega časa ne poveča bistveno, se pa s takšno izbiro hkrati izboljša pogojenost togostne matrike elementa in s tem tudi uporabnost končnega elementa v praksi.

6 Zahvala

Avtorja prispevka se zahvalujeta profesorju Chen Wanjiu za predlog o razširitvi interpolacijskih funkcij z dodatnimi členi.

Literatura

- [1] Ciarlet, P. G.; *Finite Element Methods for Elliptic Problems*, SIAM, Philadelphia, 2002.
- [2] Demmel, J. W.; *Applied Numerical Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 1997.
- [3] Flajs, R., Saje, M.; *O konvergenci nekonformnega nekonveksnega štirikotnega končnega elementa za tanke plošče RPQ4*, Kuhljevi dnevi 2007, 63–72, Ljubljana, 2007.
- [4] Flajs, R., Saje, M.; *O konvergenci izboljšanega nekonformnega štirikotnega končnega elementa za tanke plošče*, Kuhljevi dnevi 2008, 57–64, Ljubljana, 2008.
- [5] Shi, Z. C.; *A convergence condition for the quadrilateral Wilson element*, Numer. Math., 44, 349–361, 1984.
- [6] Wanji, C., Cheung, Y. K.; *Refined nonconforming quadrilateral thin plate bending element*, Int. J. Num. Meths. Eng., 40, 3919–3935, 1997.



Primerjava simulacije delovanja Darrieusove vodne turbine po postopku z modelom gibanja togega telesa in postopkom MFR

M. Fleisinger¹, M. Zadavec², M. Vesenjāk², M. Hriberšek², K. Udovičič¹

Comparison of CFD simulation of Darrieus water turbine using the rigid body solver and the MFR method

Povzetek. Med tehnologijami za izkoriščanje vodne energije se vse pogosteje uporabljajo tudi prilagojene tehnologije za izkoriščanje energije vetra. K njihovem razvoju pripomorejo sodobne računalniške simulacije. Predstavljena je primerjava dveh metod numerične simulacije Darrieusove turbine s poudarkom na ustreznosti delovanja nove metode z uporabo modela gibanja togega telesa (modul 6DOF). Ta omogoča simulacijo turbine, pri kateri je le-ta gnana s tokom tekočine, se pravi, da bolje opiše realne obratovalne razmere kot uveljavljen postopek MFR.

Abstract. Among technologies for stream energy extraction there are new emerging technologies using adapted wind energy extraction technologies. Their development is enhanced by using modern computer simulations. This document presents a comparison between two methods for numerical simulation of Darrieus turbine with emphasis on the suitability of the new rigid body solver. It enables the simulation of a turbine that is flow-driven, which better describes the real operating conditions than the MFR method.

1 Uvod

Potrebe po energiji se vsak dan večajo, prav tako pa narašča interes za energijo pridobljeno s katerim izmed obnovljivih virov. Med temi je zagotovo najbolj stabilna in predvidljiva vodna energija, a je pri nas in v svetu večina vodotokov energetsko že izkoriščenih. Tukaj prednjačijo najbolj razširjene tehnologije za pridobivanje energije, ki običajno potrebujejo zajezeitev. Nekateri še prosti vodotoki pa niso izkoriščeni zaradi ekonomskih ali okoljevarstvenih razlogov, ali pa niso primerni za izkoriščanje s tovrstno tehnologijo [1]. V zadnjem času so se pričeli izvajati različni poskusi izkoriščanja energije morskih tokov. A tukaj se le redko uporabljajo običajne tehnologije z zajezivitvijo, veliko bolj pogosto je

¹ Kogal s.p., Šentilj.

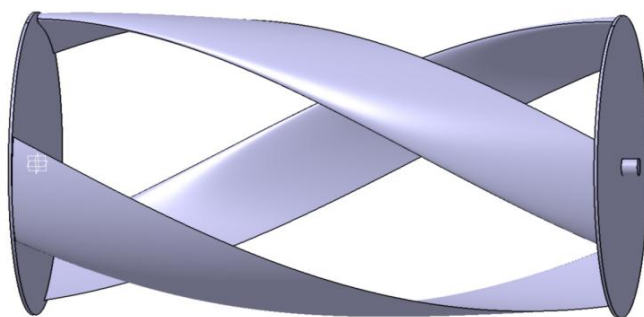
² Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

potrebno uporabiti tehnologijo podobno tisti za izkoriščanje energije vetra, kjer je uporabna predvsem kinetična energija toka vode, pri čemer je bistvena razlika predvsem v gostoti medija. S podobno tehnologijo je mogoče pridobivati energijo tudi iz vodotokov s primerno hitrostjo toka, pri čemer pa smo omejeni z njegovim presekom. Turbine, ki izkoriščajo kinetično komponento vodne energije imenujemo hidrokinetične turbine, po zgradbi pa jih delimo na takšne, ki imajo os vrtenja postavljeno vzporedno s tokom (običajne dvo, tri ali večkrake elise) in takšne, ki imajo os postavljeno pravokotno na tok (Darrieusove turbine, ki imajo lopatice nameščene vzporedno z osjo vrtenja). Prav takšni dve vrsti turbin sta v zadnjem času postali zanimivi tudi za izkoriščanje kinetične energije vodotokov, pri čemer je prednost slednje, da običajno ena turbina zadošča za celoten presek vodotoka in tako potrebuje le en generator električnega toka, konstrukcija turbine pa tako med delovanjem kot tudi mirovanjem omogoča razmeroma prost prehod vodnih organizmov skozi njo, ker ne potrebuje zajezitive, pa je celotno turbino razmeroma enostavno mogoče tudi odstraniti iz vodotoka.

Namen raziskave je primerjava rezultatov simulacijo delovanja Darrieusove vodne turbine z uporabo novega modula 6DOF (angl.: 6 Degrees of freedom) z že uveljavljenim postopkom MFR (angl.: Multiple frames of reference) v programskem paketu Ansys CFX 13. Nov 6DOF modul z modelom gibanja togega telesa namreč omogoča simulacijo turbine, ki jo žene tok tekočine, medtem ko je pri metodi MFR potrebno hitrost vrtenja turbine predpisati, s čimer prvi bolj natančno opiše realne obratovalne pogoje.

2 Darrieusova turbina

Darrieusova turbina (slika 1) je bila sprva načrtovana za izrabo energije vetra, kjer je os vrtenja postavljena v navpični smeri. V literaturi je pogosto imenovana kot »Vetrna turbina z vertikalno osjo« (angl.: VAWT – Vertical axis wind turbine) [2]. Gre za reakcijsko turbino, saj za pogon izkorišča vzgonske sile, ki nastajajo pri gibanju aerodinamično oblikovanih lopatic skozi obtočni fluid, zato obodne hitrosti lopatic dosegajo hitrosti, ki so mnogo večje od hitrosti toka fluida. Turbino je leta 1927 razvil Francoski aeronavtični inženir Georges Jean Marie Darrieus, ki je leta 1931 zanj pridobil patent v ZDA [2].



Slika 1: Darrieusova turbina z vodoravno osjo vrtenja in lopaticami v obliki vijačnice.

Za analitični izračun karakteristik Darrieusovih turbin obstaja več teoretičnih modelov (enojna in mnogokratna tokovna cev, vrtilni model), ki imajo pomanjkljivosti, predvsem zaradi teoretičnih predpostavk in poenostavitev [2]. Zato je bila izbrana numerična simulacija rotorja turbine s pomočjo računalniške dinamike tekočin, ki lahko zajame zelo kompleksne pojave. Med delovanjem Darrieusove turbine vsaka izmed lopatic potuje po krožnici, pri čemer se ji neprestano spreminja vpadni kot glede na relativno smer toka vode in tako ciklično prehajajo med območji z maksimalnim vzgonom do popolnega odtrganja mejne plasti in izgube vzgona. Z numerično simulacijo je možno dobro opisati te pojave in dobiti boljši vpogled v razmere med delovanjem turbine in najti morebitne izboljšave za povečanje učinkovitosti ter zanesljivosti.

3 Opis metod reševanja računalniškega modela

Običajno so se v praksi tovrstne simulacije osredotočale na posamezne pojave v določeni fazi delovanja, kot je npr. preučevanje začetka kavitacije na posamezni lopatici turbine, pri čemer ne gre za časovno odvisno simulacijo [3].

S povečanjem zmogljivosti računalnikov in razvojem programske opreme je mogoče simulirati delovanje celotne turbine, oziroma vseh njenih relevantnih delov preko celotnega območja njihovega delovanja. To omogoča metoda z več koordinatnimi sistemi MFR. Tudi v tem primeru je potrebno predvideti in predpisati večino parametrov v kolikor želimo opazovati prehodne pojave med delovanjem turbine. Tako je potrebno podati hitrost toka in tudi kotno hitrost rotorja turbine, kot rezultat pa je mogoče izmeriti moment na lopaticah in prikazati tokovno in tlačno polje okrog lopatic turbine. Takšna simulacija predstavlja dober približek realnim razmeram, pri čemer pa jih ne zajema povsem natančno. Pri Darrieusovi turbini s tremi lopaticami so namreč med delovanjem opazna precejšnja nihanja v navoru na gredi, saj posamezna lopatica proizvede največji vrtilni moment v ozkem območju vrtljaja, nato pa ta precej upade in celo menja predznak. Vse to vpliva tudi na kotno hitrost, ki ni konstantna kakor je predpisana pri uporabi metode z MFR, temveč se pojavijo določena nihanja.

V kolikor želimo dobiti boljši vpogled v tokovne razmere pri delovanju turbine je potrebno izvesti simulacijo na tak način, da tok vode obteka lopatice turbine, te pa se zaradi sil, ki delujejo nanje pričnejo vrteti. V tem primeru je simulacija delovanja natančnejša v smislu robnih pogojev, še posebej, če je mogoče predpisati tudi realne parametre, kot je vztrajnostni moment rotorja turbine z generatorjem in obremenitev le tega z nasprotnim vrtilnim momentom. Tako je z dovolj dolgim časom simulacije mogoče doseči, da se vrtljaji turbine ustalijo in s tem predvideti tudi največjo zmogljivost turbine. To omogoča model gibanja togih teles v novem modulu 6DOF znotraj programskega paketa Ansys CFX 13.

3.1 Model gibanja togega telesa

Togo telo je objekt, ki se giblje skozi tekočino, njegova oblika pa se ne spreminja. Njegovo gibanje je posledica sil in momentov tekočine, ki delujejo nanj ter zunanjih sil (vzgon, gravitacija, sile trenja). Programski paket Ansys CFX [4] omogoča modeliranje togega telesa na dva načina; kot vsoto dvodimenzionalnih regij, ki predstavljajo njegove površine, ali kot potopljeno telo (angl.: Submerged body). Programski paket Ansys CFX v 6DOF modulu preračunava položaj in orientacijo togega telesa z uporabo enačb gibanja togega telesa, ki omogočajo do 6 prostostnih stopenj – tri translacije in tri rotacije. Enačbe gibanja lahko zapišemo kot:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{K}}{dt} \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (1, 2)$$

Ti enačbi določata, da je za spremembo gibalne \mathbf{K} ali vrtilne količine \mathbf{L} tega telesa potrebna sila \mathbf{F} ali moment \mathbf{M} . Algoritem za simulacije togih teles uporablja zakon o ohranitvi gibalne količine za translacijsko gibanje in zakon o ohranitvi vrtilne količine za rotacijsko gibanje togih teles.

Enačbo translacijskega gibanja za telo z masnim središčem \mathbf{x} lahko zapišemo z uporabo II. Newtonovega zakona:

$$\sum \mathbf{F} = m \cdot \ddot{\mathbf{x}} \quad (3)$$

kjer je m masa, $\sum \mathbf{F}$ pa predstavlja vsoto vseh sil, ki zajema aerodinamične sile, silo teže, vzmetne in zunanje sile. Razširjen zapis vsote le teh zapišemo kot:

$$\sum \mathbf{F} = m \cdot \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_{\text{aero}} + m \cdot \mathbf{g} - k_{\text{vzmet}} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{SO}}) + \mathbf{F}_{\text{zun}} \quad (4)$$

kjer je \mathbf{F}_{aero} aerodinamična sila, \mathbf{g} je gravitacijski pospešek, k_{vzmet} linearna vzmetna konstanta in \mathbf{F}_{zun} vse ostale zunanje sile, ki delujejo na telo (vzgon, sila trenja). Aerodinamična sila \mathbf{F}_{aero} je izračunana iz rezultatov tokovnega polja, ki je rezultat računalniške simulacije dinamike tekočin:

$$\mathbf{F}_{\text{aero}} = \sum (-p_i \cdot \mathbf{n}_i + \boldsymbol{\tau}_i) \cdot S_i \quad (5)$$

kjer je p_i tlak, ki deluje na površino kontrolnega volumna, \mathbf{n}_i je vektor pravokoten na njegovo površino, $\boldsymbol{\tau}_i$ tenzor strižnih napetosti in S_i površina kontrolnega volumna.

Za reševanje diferencialne enačbe (4) je uporabljena Newmarkova-beta metoda, ki zagotavlja natančnost drugega reda ob hkratni numerični stabilnosti. Ta je odvisna od dveh parametrov, β in γ , ki imata v splošnih aplikacijah vrednosti $\frac{1}{4}$ in $\frac{1}{2}$ [4].

Gibalna enačba rotirajočega tega telesa je zapisana kot:

$$\sum \mathbf{M} = \mathbf{J} \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}} \quad (6)$$

kjer je \mathbf{J} tenzor masnega vztrajnostnega momenta, $\ddot{\boldsymbol{\theta}}$ je kotni pospešek in $\sum \mathbf{M}$ skupni moment, sestavljen iz pogonskih momentov, ki so posledica sil na telo v smeri vrtenja in zaviralnih momentov na gredi turbine in trenja v ležajih. Program za reševanje enačb uporablja algoritem Simo-Wong drugega reda, ki natančno ohranja energijo in zagotavlja ohranjanje skupne vrtilne količine [4].

3.2 MFR metoda

MFR (Multiple Frames of Reference) metoda omogoča simulacije problemov, v katerih je prisotno relativno gibanje nekega dela problema glede na celotno območje reševanja

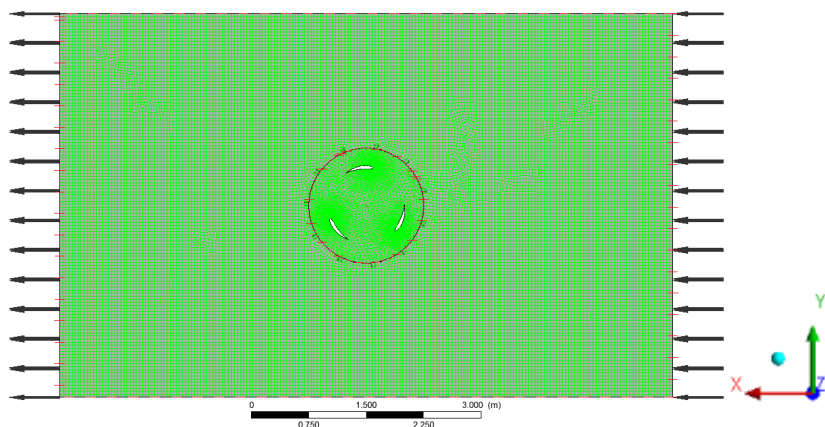
problema. MFR metoda temelji na GGI (angl.: Generalized Grid Interface) metodi, ki poveže mreže različnih območij na njihovih stičnih ploskvah, pri čemer se v rotirajočem območju, ki se vrti s konstantno kotno hitrostjo ω v enačbi ohranitve gibalne količine dodata dve volumski sili, in sicer:

$$F_{Cor} = -2 \cdot \rho \cdot \omega \times U \quad F_{c_{fg}} = -\rho \cdot \omega \times (\omega \times r) \quad (7, 8)$$

kjer je F_{Cor} Coriolisova sila, $F_{c_{fg}}$ centrifugalna sila, ρ gostota fluida, U hitrost rotacijske domene in r lokacijski vektor.

4 Model turbine

Numerični model turbine je pri obeh postopkih simulacije sestavljen iz stacionarne domene velikosti $8 \text{ m} \times 5 \text{ m}$, debeline 20 mm in rotirajoče domene okrogle oblike postavljene v sredino stacionarne domene, ki ima premer $1,5 \text{ m}$. Znotraj nje so 3 turbinske lopatice, ki imajo obliko profila Naca Langley Symetrical Supercritical, pri čemer je ta projiciran na krožnico s premerom 1 m , kar je tudi premer rotorja turbine. Model je diskretiziran s skupaj 99022 elementi in 68747 vozlišči, pri čemer so najmanjši elementi velikosti 2 mm uporabljeni na območju prednjega roba lopatic turbine, največji elementi pa sestavljajo stacionarno domeno. Ker je bil uporabljen turbulentni model SST (angl.: shear stress transportation), je bila mejna plast okrog lopatic modelirana s po petimi elementi s stopnjo rasti 1,1. Zgornja in spodnja površina modela (min. y in maks. y) imata robni pogoj stene (ang. wall), na vstopni strani (min. x) je vstop (angl.: inlet) s predpisanim tokom hitrosti $1,5 \text{ m/s}$ v smeri osi x , na izstopni strani (maks. x) pa izstop (angl.: outlet) z relativnim tlakom 0 Pa . Stranski površini obeh domen (min. z in maks. z) imata robni pogoj simetrije (angl.: symmetry) s čimer so izničeni vplivi toka v ozkem kanalu ali vplivi koncev lopatic. Ker je predvidena lega turbine vodoravna v smeri negativne z osi deluje gravitacijski pospešek g . Osnovni model turbine je prikazan na sliki 2.



Slika 2: Numerični model turbine s predpisanimi robnimi pogoji.

4.1 Robni pogoji modela za simulacijo z modulom 6DOF

Robni pogoji za simulacijo z modulom 6DOF so uvedba definicije togega telesa (angl.: rigid body), ki ga sestavljajo vse površine na stiku vode in lopatic, pri čemer je potrebno podati maso in masne vztrajnostne momente J_{xx} , J_{yy} in J_{zz} . Predpisati je potrebno še začetne pogoje gibanja, zunanje sile in upore, ki pri naši analizi niso bili potrebni, predpisan pa je bil zunanji moment na podlagi sil obtekajoče tekočine in sproščena rotacija okrog osi Z. Dodatno je bil uveden lokalni koordinatni sistem z izhodiščem v sredini rotirajoče domene, slednja pa je bila v tej simulaciji predpisana kot poddomena.

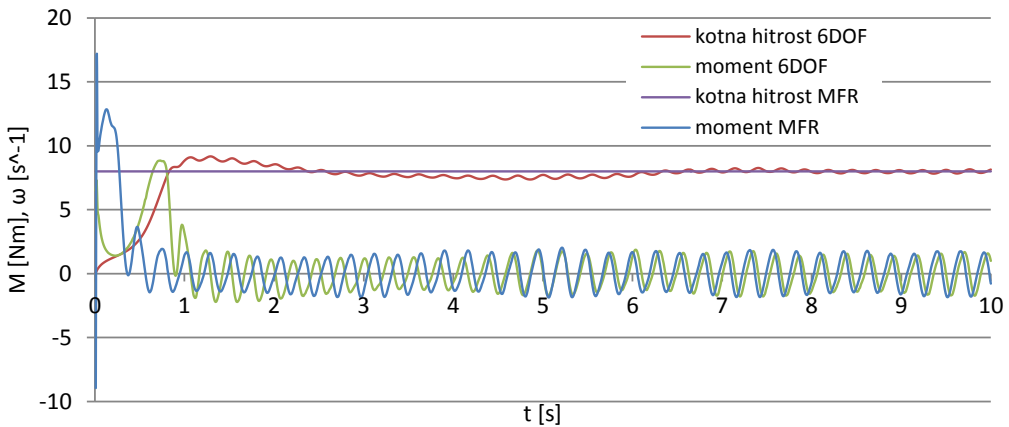
4.2 Robni pogoji modela za simulacijo po metodi MFR

Model za simulacijo po metodi MFR se od prvega razlikuje po tem, da ni potrebno definirati površin togega telesa in vseh z njim povezanih parametrov in dodatnega koordinatnega sistema v središču rotacije. Na stičnih površinah med stacionarno in rotirajočo domeno je potrebno predpisati model vmesnika (angl.: Interface model), ki je v primeru časovno odvisne simulacije prehodni rotor-stator (angl.: Transient rotor stator). To definira časovno odvisno simulacijo turbine, pri čemer se rotirajoča domena vrti glede na stacionarno domeno.

5 Simulacije turbine in rezultati

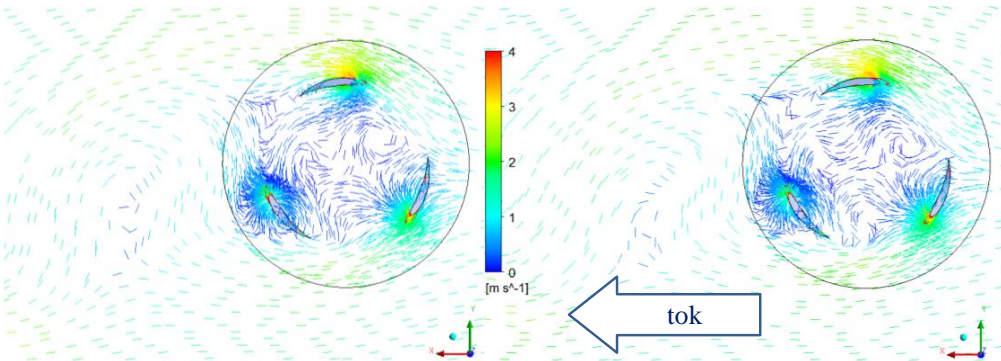
Primerjava obeh postopkov simulacij je potekala tako, da je bila najprej izvedena simulacija z uporabo modula 6DOF, kjer je bil predpisan končni čas 10 sekund in časovni korak 0,01 s. Za Darrieusovo turbino v splošnem velja, da se ne more zagnati iz vseh položajev glede na smer toka. V našem primeru se je turbina iz začetnega mirujočega položaja lopatic zaradi predpisane hitrosti toka vode zagnala, po preteku 3 sekund simulacije se je njeno delovanje stabiliziralo, se pravi da sta se ustalila kotna hitrost in navor na lopatice turbine vse do 10. sekunde oz. do konca simulacije. Po končani simulaciji z modulom 6DOF je bila izračunana povprečna vrednost kotne hitrosti v stabilnem območju delovanja turbine, ki je znašala 8 s^{-1} . Nato je bila v model, pripravljen za simulacijo po postopku MFR, vnesena vrednost kotne hitrosti rotirajoče domene 8 s^{-1} . Simulaciji sta bili izvedeni na enaki delovni postaji s procesorjem Intel Core I7-960 s taktom 3,2 GHz in 12 Gb delovnega pomnilnika, z uporabo programskega paketa Ansys-CFX 13.0. Z uporabo osnovnih nastavitev programa je znašal celoten čas simulacije po postopku z modulom 6DOF 14 ur in 47 minut, medtem ko je simulacija po postopku MFR trajala 4 ure in 55 minut, torej le tretjino časa prve simulacije.

Iz rezultatov te simulacije je bil izračunan časovni potek vrtilnega momenta na lopatice turbine, ki smo ga primerjali s časovnim potekom vrtilnega momenta, kar je prikazano na sliki 3.



Slika 3: Potek vrtilnih momentov in kotnih hitrosti v odvisnosti od časa.

Iz slike sta razvidna poteka vrtilnih momentov preko celotnega časa simulacije in potek kotnih hitrosti turbine pridobljene s simulacijo z modulom 6DOF in metodo MFR. Največja odstopanja se pojavijo na začetku zaradi različnih postopkov simulacije, ko pa se delovanje turbine in tok okrog nje ustalita, sta poteka vrtilnih momentov precej podobna. Njuna povprečna vrednost je približno enaka 0, saj turbina ni obremenjena z zavornim momentom, medtem ko so njune amplitude povsem primerljive. Rezultati simulacije po postopku MFR kažejo na nekaterih delih nekoliko večje amplitude vrtilnega momenta, a to lahko pripišemo predpisani konstantni kotni hitrosti turbine, ki pri metodi z modulom 6DOF in tudi v realnih razmerah ni konstantna.



Slika 4: Primerjava hitrostnih polj simulacij; levo 6DOF desno MFR.

Na sliki 4 sta prikazani hitrostni polji obeh simulacij v istem položaju in v času, ko sta se moment na lopatice in tok okrog rotorja turbine že stabilizirala, pri čemer je tok vode v smeri osi x. V obeh primerih se tvorjenje vrtncev za turbino po velikosti ujema.

6 Zaključek

Primerjava simulacij z modulom 6DOF in postopku MFR je pokazala dobro ujemanje rezultatov v smislu ovrednotenega vrtilnega momenta na rotor turbine, kot tudi hitrostnega polja in vrtnčenja v toku za turbino. Tako je mogoče uporabiti modul 6DOF za natančnejše proučevanje delovanja tovrstnih strojev in ostalih podobnih problemov. Takšna simulacija je na področju turbin posebej uporabna pri preučevanju pojavov ob zagonu turbine, saj je mogoče opazovati kako tok vode obteka mirujoče lopatice, ki se zaradi vzgonskih in uporovnih sil pričnejo gibati. Uporabna pa je tudi za simulacijo maksimalne zmogljivosti turbine, saj je mogoče breme v obliki negativnega momenta postopoma povečevati in tako opazovati pri kolikšni obremenitvi se turbina preneha vrteti. Bistveno daljši računski časi te metode v primerjavi s postopkom MFR sicer predstavljajo oviro, še posebej, ker je bila preizkusna simulacija opravljena na zelo majhni širini celotne turbine.

V nadaljnjem delu je načrtovana primerjava z eksperimenti, ki se bodo izvedli na naravnem vodotoku s skaliranim modelom Darrieusove turbine z vodoravno osjo, z namenom dodatne validacije predstavljenih metod. Hkrati bodo rezultati simulacije z modelom gibanja togih teles omogočali natančnejše predpisovanje robnih pogojev predvidenih simulacij interakcije trdnine in tekočine.

Zahvala

Operacijo delno financira Evropska Unija, in sicer iz Evropskega socialnega sklada.
Operation part financed by the European Union, European Social Fund.

Literatura

- [1] A. Kryžanowski, A. Horvat, M. Brilly, *Možnosti izkoriščanja energetskega potenciala v Sloveniji*, 2008.
- [2] I. Paraschivoiu, *Wind turbine design with emphasis on Darrieus concept*, Polytechnic International Press, Canada. 49, 55--70, 2002.
- [3] S. Bernad, A. Georgescu, S. C. Georgescu, R. Susan-Resiga, *Flow investigations in Achard turbine*, Proceedings of the Romanian academy, series A, Vol. 9, 2008
- [4] Ansys CFX, Release 13.0, Ansys CFX-Solver Theory Guide, Ansys, Inc., 341--345, 2010.



Numerična analiza vpliva gostote potencialnih razpok v zidakih na odziv zidu

M. Gams¹

Numerical analysis of influence of density of potential cracks in bricks on response of a masonry wall

Povzetek. V tem delu predstavimo nadgradnjo modela za analiziranje odziva zidu na ekstremne obremenitve v njegovi ravnini. Nadgradnjo predstavlja uvedba večjega števila potencialnih razpok v zidake, medtem ko običajni pristopi ne predvidevajo takih razpok oz. predvidevajo največ eno. Taka nadgradnja omogoča eksplicitno modeliranje pokanja zidakov in občutno izboljša napoved vzorca razpok v zidu, predvsem za zidove z visokimi tlačnimi obremenitvami. Z numeričnimi analizami poskušamo ugotoviti, kakšna je najbolj primerna oblika in gostota vzorca potencialnih razpok v zidaku. Vsi predstavljeni rezultati so verificirani s primerjavo z rezultati iz literature in validirani s primerjavo z eksperimentalnimi rezultati.

Abstract. An improvement of a meso-model for modeling the response of brick masonry walls to extreme lateral in-plane loads is presented. The effect of application of many potential cracks in bricks is analyzed, which is an improvement of the standard approach with no or at most one potential crack in brick. Such approach enables explicit modeling of cracking of bricks and superior crack path predictions, especially for walls under high compression. By running multiple numerical simulations the most appropriate shape and density of the pattern are sought. All results are compared to results from literature and experimental results and are thus verified and validated.

1 Uvod

V zadnjem času so se v zidarstvu pojavili novi materiali in nove tehnologije gradnje, ki imajo pomemben vpliv na vodoravno odpornost zidovja. Ključna novost je uporaba novih tankih malt in gradbenih lepil (uporabljajo se tudi PU lepila). Za vsakega od novih proizvodov oz. tehnologij je potrebno razmeroma veliko eksperimentalnega preizkušanja, s katerim se pokaže ustreznost za prenašanje potresne in vetrne obtežbe, kar pa je drag in dolgotrajen postopek. Rezultati testiranja pogosto pokažejo, da obnašanje teh zidov težko

¹ Zavod za gradbeništvo Slovenije

ocenimo z obstoječimi matematičnimi modeli [1]. Zaradi tega obstaja velika potreba po razvoju novih in izboljšavi obstoječih matematičnih modelov.

Najbolj pogosto uporabljen pristop za modeliranje strižno obremenjenega zidu z razpokami oz. razpokanjem je t.i. pristop na mezo nivoju (meso-scale approach), v katerem se ločeno modelira zidake, malto in stik med malto in zidakom. Prednosti take analize so zelo natančne napovedi za sile in pomike daleč v nelinearno območje ter rezultati porazdelitev napetosti in deformacij pred in po razpokanju, kar omogoča detajlno analizo mehanizma odpornosti in porušitve. Taki modeli so zato odlično orodje za analizo eksperimentalnega odziva zidu, hkrati pa tudi dopolnilo, s katerim lahko s parametričnimi analizami analiziramo vpliv materialnih podatkov in geometrije. Slabe strani tega modela so relativna računska zahtevnost, ki še vedno preprečuje, da bi se taki modeli uporabljali za analizo celih konstrukcij, razmeroma zapletene teoretične osnove in najpomembneje: količina dodatnih preizkušanj, ki jih moramo opraviti za določitev materialnih parametrov.

Osnovni princip takega modeliranja je, da se vse možne (lokalne) porušitve v zidu modelira z diskretnimi linijami [2], v katerih se uporabi »interface« oz. stične elemente z ustreznimi nelinearnimi materialnimi zakoni. Za preostali del zidu (za zidake) pa se predvidi elastično ravninsko napetostno stanje. Včasih se v zidake doda eno navpično »razpoko«, ki je zopet modelirana s stičnim končnim elementom. Večino kompleksnosti obnašanja zidu se tako prenese na uspešno in učinkovito reševanje lokalnih enačb v stiku in v literaturi je moč zaslediti korelacijo med razvojem formulacij za stike [3] in tovrstnim modeliranjem zidov [4].

Stične elemente se v mehaniki loma krhkih materialov pogosto uporablja tako, da se v (makroskopsko gledano) izotropen material, kot je kost ali beton vstavi večje število stičnih elementov, ki predstavljajo potencialne razpoke. Simulacije kažejo, da je, če je potencialnih razpok dovolj, vzorec razpok in odziv zelo podoben eksperimentalnemu [5-7]. V tem prispevku poskušamo ta dva pristopa združiti tako, da v zidake dodajamo večje število stičnih elementov, s čimer upamo, da bo tak model bolje napovedal odziv zidu in vzorec razpok oz. pokanje zidu.

2 Stični (interface) element in tehnika numeričnega reševanja

Materialni model na nivoju integracijske točke za stični element je povzet po članku Macorini in Izzuddina [4] in je tu ponovno naveden v kompaktni obliki zaradi berljivosti članka. Obravnavan je ravninski primer, kjer so pomiki v lokalnem koordinatnem sistemu stika označeni z $\mathbf{u} = \{u, v\}$ in napetosti v normalni in strižni lokalni smeri s $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma, \tau\}$. Topološko gledano je stični element sestavljen iz dveh linijskih elementov, ki se lahko prekrivata ali pa sta poljubno razmaknjena (debelina stika v formulaciji ne igra vloge). Če si predstavljamo, da ena linija leži nad drugo, nam linearne spremembe pomikov v prekrivajočih se vozliščih predstavljajo zamike $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_{zg} - \mathbf{u}_{sp}$, od katerih so odvisne sile, ki so definirane so na nivoju sila-pomik. Napetost v integracijski točki izračunamo po formuli

$$\boldsymbol{\sigma} = \{k_n(\Delta u - u_{pl,1} - u_{pl,2}), k_s(\Delta v - v_{pl,1} - v_{pl,2})\}, \quad (1)$$

kjer indeksa $\square_{pl,1}$ in $\square_{pl,2}$ označujeta plastični pomik za prvo in drugo plastičnost. Območje možnih materialnih stanj omejujeta dve hiperboli oz. funkciji tečenja F_1 (natezna in strižna

porušitev) in F_2 (porušitev v tlaku), ki sta s pripadajočimi potenciali plastičnosti definirani kot

$$F_1 = \tau^2 - (c - \sigma \tan \phi)^2 + (c - \sigma_t \tan \phi)^2, \quad (2)$$

$$F_2 = \tau^2 - (d + \sigma \tan \phi)^2 + (d - \sigma_c \tan \phi)^2, \quad (3)$$

$$Q_1 = \tau^2 - (c_Q - \sigma \tan \phi_Q)^2 + (c_Q - \sigma_t \tan \phi_Q)^2, \quad (4)$$

$$Q_2 = F_2. \quad (5)$$

Ko definiramo brezdimenzijsko funkcijo δ v odvisnosti od plastičnega dela W_{pl} in energije loma G

$$\delta(W_{pl}, G) = \begin{cases} 1/2 \left(1 - \cos \left(\pi W_{pl}/G \right) \right); & 0 \leq W_{pl} \leq G \\ 1; & W_{pl} > G \end{cases}, \quad (6)$$

lahko z njo opišemo 'plastični' razvoj količin oz. materialnih parametrov. Za natezno trdnost $\sigma_t(W_{pl,1}, G_1)$, kohezijo $c(W_{pl,1}, G_2)$, parameter plastičnega potenciala $c_Q(W_{pl,1}, G_2)$ in parameter funkcije tečenja $d(W_{pl,2}, G_c)$ se plastični razvoj zapiše z generično funkcijo

$$A(W_{pl,\square}, G_\square) = A_0 (1 - \delta(W_{pl,\square}, G_\square)), \quad (7)$$

v kateri A_0 predstavlja začetno vrednost parametra. Za tangents strižnega kota $\tan \phi(W_{pl,1}, G_1)$, parameter plastičnega potenciala $c_Q(W_{pl,1}, G_2)$, tlačno trdnost $\sigma_c(W_{pl,2}, G_c)$ in parametrov funkcije tečenja $d(W_{pl,2}, G_c)$ in $\tan \theta(W_{pl,2}, G_c)$ je plastični razvoj podan z generično enačbo

$$B(W_{pl,\square}, G_\square) = B_0 (B_0 - B_R) \delta(W_{pl,\square}, G_\square), \quad (8)$$

kjer je B_0 začetna in B_R končna oz. residualna vrednost parametra. G_1 in G_2 sta energiji loma za nateg in tlak, G_c pa je energija drobljenja (v tlaku). Plastično delo se izračuna po enačbah

$$\Delta W_{pl1} = \begin{cases} \sigma \Delta u_{pl1}; & \sigma \geq 0 \\ (|\tau| + \sigma \tan \phi) |\Delta v_{pl1}|; & \sigma < 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\Delta W_{pl2} = \sigma \Delta u_{pl2}. \quad (10)$$

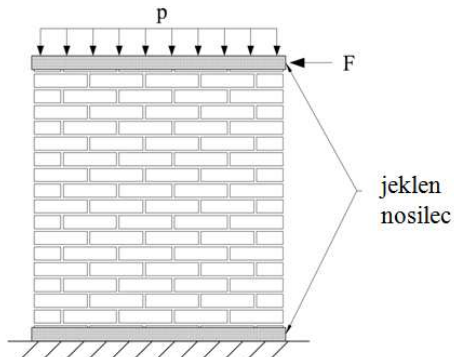
Elastični deli konstrukcije so modelirani z ravninskimi stenastimi elementi z ravninskim napetostnim stanjem. Na lokalnem nivoju reševanja se rešuje enačbe dvoploskovne plastičnosti, pri čemer je posebnost reševanja uporaba t.i. monolitnega algoritma, v katerem se vse lokalne enačbe rešuje hkrati kot sistem enačb za neznanke $u_{pl,1}, u_{pl,2}, v_{pl,1}, v_{pl,2}, \lambda_1, \lambda_2, W_{pl,1}$ in $W_{pl,2}$. Reševanje na lokalnem nivoju je adaptivno, kar pomeni, da se lahko zamiki v integracijski točki nanašajo postopno v več korakih, s čimer se izboljša konvergenca. Na globalnem nivoju je uporabljen impliciten dinamični račun (Newmarkova časovna integracijska shema z numeričnim dušenjem) z adaptivnim prilagajanjem časovnega koraka oz. velikosti obtežbe, s čimer se poveča robustnost reševanja. Predstavljeni model je bil sprogramiran v orodju za razvoj programske kode končnih elementov AceGen [8], računi pa so potekali v programu AceFEM.

3 Numerične analize

3.1 Zidovi in vzorci potencialnih razpok

Vse analize se nanašajo na zidove, ki sta jih eksperimentalno preizkusila Vermeltfoort in Raijmakers [9]. To so trije vzorci zidov dimenzij 99 x 100 cm (dolžina x višina), sezidanih iz polnih opečnih zidakov dimenzij 204 x 98 x 50 mm in s podaljšano malto zapolnjenimi regami debeline 12,5 mm. Zidovi so sestavljeni iz 18 vrst zidakov po višini, pri čemer sta spodnja in zgornja vrsta vpeti v jeklene nosilce. Spodnja vrsta zidakov je toga vpeta v tla, na zgornji vrsti pa se v zid vsiljuje obtežba. Zidovi so najprej obremenjeni s predpisano vertikalno obtežbo, po nanosu katere pa se v zid na zgornjem robu vsili vodoravne pomike, pri čemer so navpični pomiki zgornjega roba preprečeni. Za vzorca J4D in J5D je stopnja vertikalne obremenitve $0,3 \text{ N/mm}^2$, za vzorec J7D pa $2,12 \text{ N/mm}^2$. Shematično so zidovi prikazani na sliki 1.

V literaturi je moč zaslediti mnogo simulacij odziva teh zidov, ki se razlikujejo v materialnih modelih stika in tudi v uporabljenih numeričnih pristopih [2, 4, 10-14]. Mnogo avtorjev za reševanje uporablja statično analizo in metode ločne dolžine, vendar je iz rezultatov razvidno, da je postopek reševanja težaven. Model, ki sta ga objavila Macorini in Izzuddin [4], daje najboljše rezultate in uporablja dinamično analizo za reševanje. Kljub temu, da na primeru teh treh zidov izgleda, da je model [4] najboljši, pa je znano, da je raztros rezultatov v zidanih konstrukcijah velik [15] in v splošnem ta model morda ni najboljši.



Slika 1: Shema zidu in robnih pogojev

V numeričnih analizah, ki jih bomo predstavili v tem delu, sta za posamezen zidak predvidena dva različna vzorca potencialnih razpok. Prvi zidake razdeli na pravokotnike, drugi pa na trikotnike. Shematično sta vzorca za polovičko zidaka prikazana na sliki 2. Z n_x označujemo število delitev v vodoravni smeri glede na polovico dolžine zidaka, z n_y pa v navpični smeri.



Slika 2: Vzorci potencialnih razpok

Materialni podatki stikov, ki so bili uporabljeni v računu so podani v tabelah 1 in 2. Elastični modul in Poissonov količnik za zidake sta bila 16700 MPa in 0,15.

Tabela 1: Materialni podatki za stične elemente (malta)

Elastični parametri	Ploskev F_1	Potencial Q_1	Ploskev F_1 in potencial Q_2
$k_n = 82 \text{ N/mm}^3$ $k_s = 36 \text{ N/mm}^3$	$\sigma_{t,0} = 0,16 \text{ MPa}$	$\sigma_{t,0} = 0,16 \text{ MPa}$	$\sigma_{c,0} = 11,5 \text{ MPa}$
	$c_0 = 0,224 \text{ MPa}$	$c_0 = 22,4 \text{ MPa}$	$\sigma_{c,R} = 1,5 \text{ MPa}$
	$\tan\phi_0 = 0,75$	$\tan\phi_0 = 0,001$	$d_0 = 11,5 \text{ MPa}$
	$\tan\phi_R = 0,75$	$\tan\phi_R = 0,0001$	$\tan\Theta_0 = 0,045$
	$G_1 = 0,018 \text{ N/mm}$	$G_1 = 0,018 \text{ N/mm}$	$\tan\Theta_R = 0,045$
	$G_2 = 0,05 \text{ N/mm}$	$G_2 = 0,05 \text{ N/mm}$	$G_c = 5,0 \text{ N/mm}$

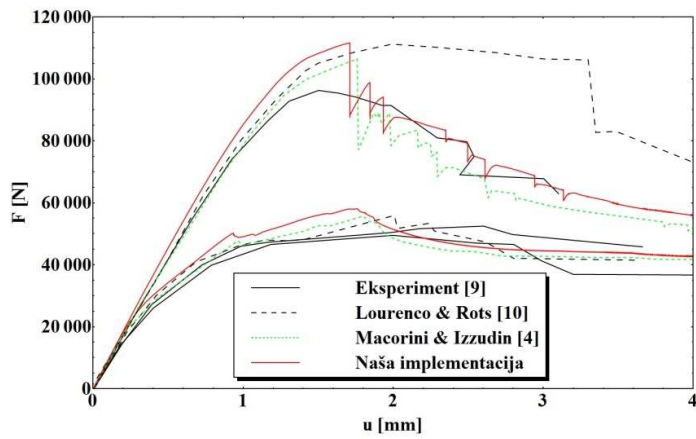
Tabela 2: Materialni podatki za stične elemente (zidak)

Elastični parametri	Ploskev F_1	Potencial Q_1	Ploskev F_1 in potencial Q_2
$k_n = 10^4 \text{ N/mm}^3$ $k_s = 10^4 \text{ N/mm}^3$	$\sigma_{t,0} = 2,0 \text{ MPa}$	$\sigma_{t,0} = 2,0 \text{ MPa}$	$\sigma_{c,0} = 11,5 \text{ MPa}$
	$c_0 = 2,8 \text{ MPa}$	$c_0 = 2,8 \text{ MPa}$	$\sigma_{c,R} = 1,5 \text{ MPa}$
	$\tan\phi_0 = 1,0$	$\tan\phi_0 = 1,0$	$d_0 = 11,5 \text{ MPa}$
	$\tan\phi_R = 1,0$	$\tan\phi_R = 1,0$	$\tan\Theta_0 = 0,045$
	$G_1 = 0,008 \text{ N/mm}$	$G_1 = 0,008 \text{ N/mm}$	$\tan\Theta_R = 0,045$
	$G_2 = 0,5 \text{ N/mm}$	$G_2 = 0,5 \text{ N/mm}$	$G_c = 5,0 \text{ N/mm}$

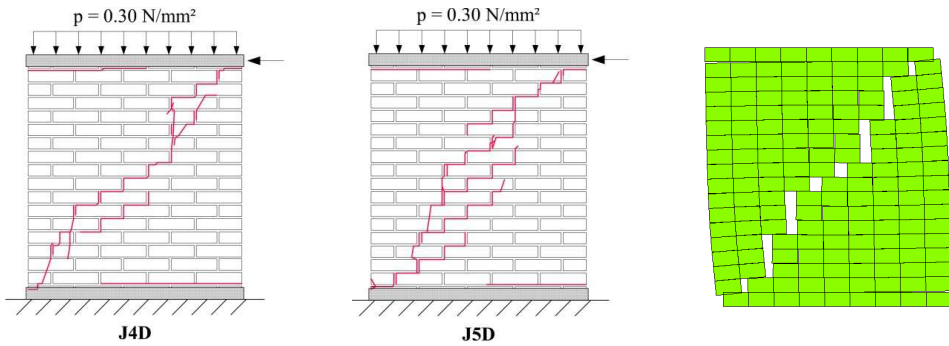
3.2 Verifikacija in validacija računskega postopka

Verifikacijo implementiranega postopka opravimo s primerjavo numeričnih in eksperimentalnih rezultatov modela z eno potencialno razpoko (slika 3). Ker je uporabljen materialni model Macorini in Izzuddina, so rezultati naše implementacije skoraj identični rezultatom v [4]. Malenkostne razlike v začetni togosti in največji doseženi odpornosti so posledica malenkostno drugačnih prostopov na globalnem nivoju, najverjetneje različnim numeričnim tolerancam in tudi ročnemu skeniranju iz literature.

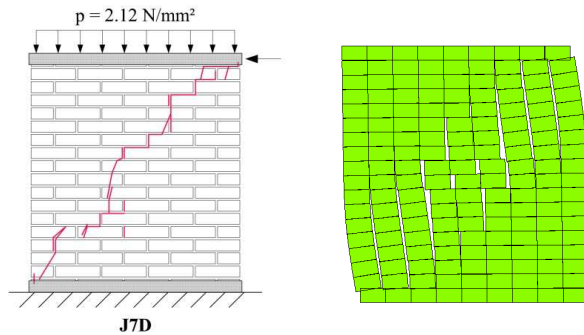
Validacijo računskega postopka predstavlja ujemanje med računsko napovedjo za odpornost zidu in eksperimentalni rezultati, ki so prikazani na sliki 3, ter primerjava vzorcev razpok v zidu, ki so prikazane na slikah 4 in 5.



Slika 3: Primerjava rezultatov različnih modelov in eksperimentov



Slika 4: Vzorci razpok zidov J4D/J5D med eksperimentom [9] (levo, sredina) in računska napoved razpok z modelom z eno potencialno razpoko (desno). Faktor pomikov 20



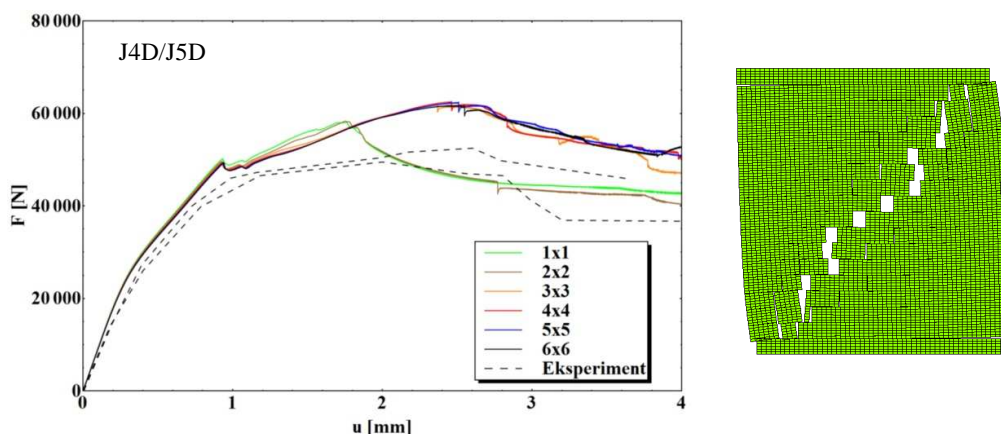
Slika 5: Eksperimentalne [9] in računske razpoke zidu J7D. Izris modelne napovedi je s faktorjem pomikov 20

3.3 Analiza vpliva vzorca potencialnih razpok

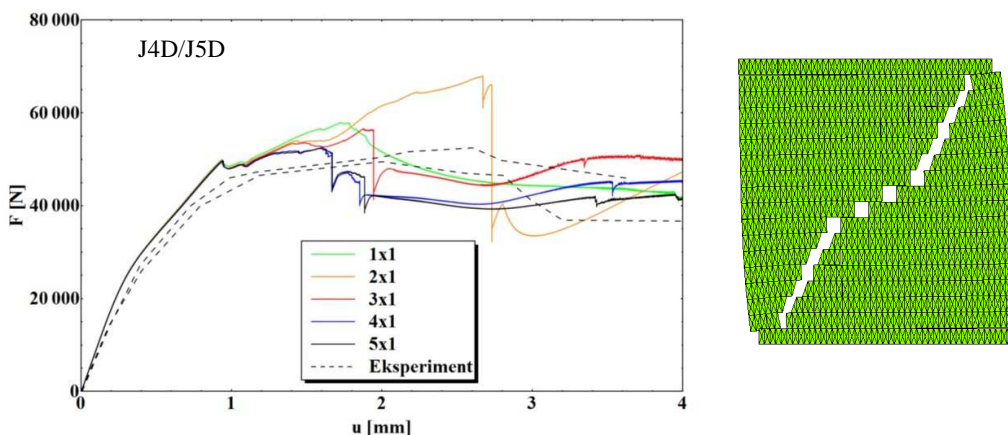
3.3.1 Zidova J4D in J5D

Primerjava rezultatov različnih gostot pravokotnega vzorca potencialnih razpok za zidova z nižjo tlačno predobremenitvijo J4D in J5D je prikazana na sliki 6 in kaže, da krivulje odpornosti konvergirajo z naraščujočim številom potencialnih razpok in da je preskok v rešitvah med gostotami manjšimi od 3x3 in večjimi. Razlog za ta preskok je sprememba poti razpok iz sredine zidakov v zamaknjeno lego. Oblika krivulje odpornosti za visoke gostote je bolj podobna eksperimentalnim rezultatom kot za majhne gostote, vendar pa je odpornost v tem primeru bolj precenjena. Kljub temu pa to nakazuje, da bi s spremembo v materialnih podatkih lahko dosegli skoraj popolno ujemanje med eksperimentom in modelom.

Rezultati za različne gostote mrež potencialnih razpok s trikotnim vzorcem za zid J4D/J5D so na sliki 7 in kažejo veliko večji raztros, čeprav z večanjem gostote nakazujejo konvergenco, ki pa je verjetno dosežena šele pri večji gostoti.



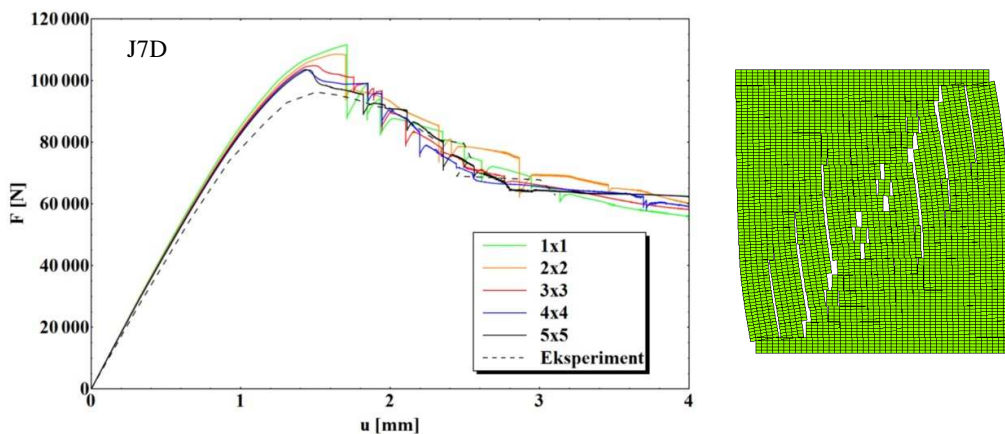
Slika 6: Krivulje odziva zida J4D/J5D pri različnih gostotah *pravokotne* mreže potencialnih razpok (levo) in vzorec razpok pri gostoti 6x6 in faktorju pomikov 20 (desno)



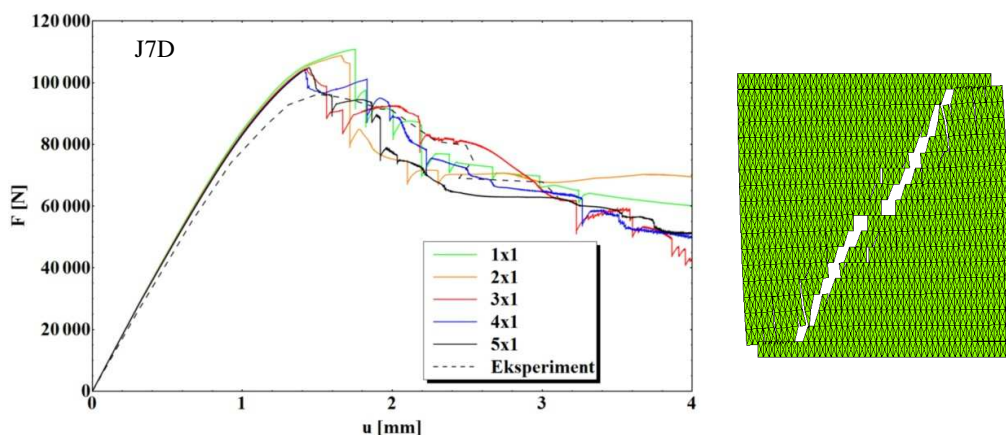
Slika 7: Krivulje odziva zida J4D/J5D pri različnih gostotah *trikotne* mreže potencialnih razpok (levo) in vzorec razpok pri gostoti 5x1 in faktorju pomikov 20 (desno)

3.3.2 Zid J7D

Rezultati različnih gostot pravokotnega in trikotnega vzorca potencialnih razpok za tlačno visoko predobremenjen zid J7D so prikazani na slikah 8 in 9 in kažejo relativno majhne razlike med različnimi gostotami. Opozorimo naj na bistveno izboljšano napoved razpok v primeru trikotnega vzorca.



Slika 8: Krivulje odziva zida J7D pri različnih gostotah *pravokotne* mreže potencialnih razpok (levo) in vzorec razpok pri gostoti 5x5 in faktorju pomikov 20 (desno)



Slika 9: Krivulje odziva zida J7D pri različnih gostotah *trikotne* mreže potencialnih razpok (levo) in vzorec razpok pri gostoti 5x1 in faktorju pomikov 20 (desno)

4 Zaključki

Pričujoče delo predstavlja razširitev standardnega pristopa na mezo ravni k modeliranju zidov z eno potencialno razpoko z dodajanjem velikega števila potencialnih razpok z različnimi vzorci v zidake. Rezultati numeričnih simulacij kažejo, da je možno natančnost analize na tak način občutno povečati predvsem v primerih močno tlačno obremenjenih zidov, saj lahko pristop z le eno potencialno razpoko napove napačen vzorec razpok pri porušitvi (npr. tlačno porušitev namesto strižne). V primeru zidov z nizko tlačno obremenitvijo pa je izboljšanje relativno majhno in verjetno ne upraviči skokovitega povečanja računske zahtevnosti predlaganega pristopa.

Simulacija problemov, ki so obravnavani v tem delu je močno povezana z robustnostjo računskega postopka in je bila uspešna zaradi dvojno adaptivnega pristopa k reševanju – na globalnem nivoju se je adaptivno prilagajal korak prirastka globalne obtežbe, na lokalnem nivoju posamezne točke pa je bil uporabljen monoliten algoritem z adaptivnim povečevanjem velikosti obtežbe. Celoten problem je bil obravnavan dinamično, s čimer smo lahko brez posebnih ukrepov analizirali odziv konstrukcije daleč v nelinearno območje z izjemno velikim padcem odpornosti.

Popolnoma splošno gledano in tudi glede na strižno obremenjevanje se zdi bolj naravna odločitev za trikotni vzorec potencialnih razpok in dejansko je le ta vzorec pokazal izboljšanje rezultatov za tlačno močno obremenjene zidove. Kljub temu pa je raztros rezultatov še vedno velik, konvergenca rezultatov v odvisnosti od gostote vzorca pa počasna, zato bodo v prihodnosti morda uporabljeni bolj ustrezni materialni modeli za razpoke v zidakah ali pa uporabljene še večje gostote potencialnih vzorcev.

Zahvala

Raziskave, ki jih predstavljamo v članku, so del raziskovalnega projekta Z2-3659, ki ga je financirala Agencija Republike Slovenije za raziskovalno dejavnost. Zahvaljujemo se za ji za podporo.

Literatura

- [1] Tomažević M, Matija G, Suikai L. Modelling of shear failure mechanism of masonry walls. 11th Canadian Masonry Symposium. Toronto, Ontario, Canada: Hamilton: McMaster University; 2009.
- [2] Lourenço PB. Computational strategies for masonry structures. Delft University Press; 1996.
- [3] Caballero A, Willam KJ, Carol I. Consistent tangent formulation for 3D interface modeling of cracking/fracture in quasi-brittle materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2008;197(33-40):2804-22.
- [4] Macorini L, Izzuddin BA. A non-linear interface element for 3D mesoscale analysis of brick-masonry structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2011;85(12):1584-608.
- [5] Carol I, Carlos L. Failure analysis of quasi-brittle materials using interface elements. *Mechanics of Quasi-Brittle Materials and Structures*. Paris; 1999. p. 289-305.
- [6] Carol I, López CM, Roa O. Micromechanical analysis of quasi-brittle materials using fracture-based interface elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2001;52(1-2):193-215.
- [7] Hillerborg A, Modéer M, Petersson PE. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research* 1976;6(6):773-81.
- [8] Korelc J. Automation of primal and sensitivity analysis of transient coupled problems. *Computational Mechanics* 2009;44(5):631-49.
- [9] Vermeltfoort A, Raijmakers T. Deformation controlled meso shear tests on masonry piers-part 2. TU Eindhoven; 1993.
- [10] Lourenço PB, Rots JG. Multisurface Interface Model for Analysis of Masonry Structures. *Journal of Engineering Mechanics* 1997;123(7):660-8.
- [11] Chaimoon K, Attard MM. Modeling of unreinforced masonry walls under shear and compression. *Engineering Structures* 2007;29(9):2056-68.
- [12] Alfano G, Sacco E. Combining interface damage and friction in a cohesive-zone model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2006;68(5):542-82.
- [13] Spada A, Giambanco G, Rizzo P. Damage and plasticity at the interfaces in composite materials and structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2009;198(49-52):3884-901.
- [14] Giambanco G, Rizzo S, Spallino R. Numerical analysis of masonry structures via interface models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2001;190(49-50):6493-511.
- [15] Tomazevič M, Weiss P. Seismic Behavior of Plain- and Reinforced-Masonry Buildings. *Journal of Structural Engineering* 1994;120(2):323-38.



Preizkuševališče za raziskave aeroelastičnih pojavov

B. Gjerek¹, R. Dražumerič¹ in F. Kosel¹

Experimental setup for aeroelastic phenomena tests

Povzetek. V prispevku je predstavljeno preizkuševališče s pripadajočim eksperimentalnim algoritmom za določitev meje dinamične ali statične stabilnosti danega aeroelastičnega sistema. Za večparameterski model je podana teoretična meja stabilnosti elastično vpetega tankega aeroprofila in primerjava z eksperimentalnimi rezultati. Namen primerjave je pokazati primernost preizkuševališča za raziskave aeroelastičnih pojavov.

Abstract. In the paper the experimental setup with the corresponding experimental algorithm for determination of dynamic or static stability limit of a given aeroelastic system is presented. Based on the multiparameter model of an elastically supported thin airfoil the theoretical stability limit is obtained and compared to the experimental results. The comparison should show that the experimental setup can be used for the aeroelastic phenomena research purposes.

1 Uvod

Raziskave na področju aeroelastičnosti imajo pomembno vlogo pri konstruiranju zračnih plovil in gradbenih konstrukcij. Pojem aeroelastičnosti je vezan na probleme pri deformabilnih strukturah v toku fluida. Medsebojni vpliv deformabilne strukture in aerodinamičnih sil pod določenimi pogoji povzroči nestabilno stanje aeroelastičnega sistema. Ločimo problem dinamične nestabilnosti oz. flutter-ja in statične nestabilnosti oz. divergence aeroelastičnega sistema. Pri problemu flutter-ja pride do tako imenovanega samovzbujanega nihanja elastične strukture v toku fluida, pri čemer se amplituda nihanja strukture s časom povečuje [1-3]. Pri problemu divergence pride do nestabilnosti začetnega ravnotežnega stanja elastične strukture, prehod v novo ravnotežno stanje pa pomeni povečevanje deformacij in s tem obremenitev strukture [1].

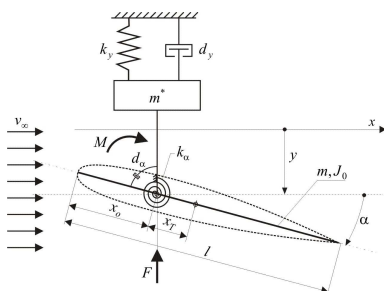
Namen tega prispevka je predstaviti celovit eksperimentalni pristop k problemu določanja meje stabilnosti aeroelastičnega sistema. Pri tem je pomembno omogočiti spreminjanje

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

strukturnih parametrov, ki bistveno vplivajo na stabilnost sistema ter razviti eksperimentalni algoritem za samodejno določanje meje stabilnosti. Za testni primer aeroelastičnega sistema je izbrana osnovna konfiguracija - elastično vpeto togo krilo z dvema prostostnima stopnjama in s prečnim prerezom tankega aeroprofila. Tako lahko pri vrednotenju rezultatov izhajamo iz dobro poznanega teoretičnega modela stabilnosti za uporabljeno osnovno konfiguracijo aeroelastičnega sistema [1-3]. Pregled dosedanjih eksperimentalnih tehnik in postopkov določanja meje stabilnosti aeroelastičnih sistemov najdemo v [5-7].

2 Teoretični model stabilnosti aeroelastičnega sistema

Aeroelastični sistem v toku zraka s hitrostjo v_∞ predstavlja dinamični model, ki je prikazan na sliki 1.



Slika 1: Dinamični model aeroelastičnega sistema.

V okviru teoretičnega modela je obravnavan ravninski problem samovzbujane nihanja elastično vpetega togega letalskega krila širine b . Prečni prerez krila ima obliko tankega aeroprofila z dolžino tetive l . Aeroelastični sistem ima dve prostostni stopnji, ki sta določeni s premikom točke vpetja y in zasukom okrog točke vpetja α . Gibanje krila v toku zraka je podano z gibalnima enačbama:

$$\begin{aligned} (m + m^*)\ddot{y} + d_y\dot{y} + k_y y + m x_T \ddot{\alpha} &= -F, \\ m x_T \ddot{y} + J_0 \ddot{\alpha} + d_\alpha \dot{\alpha} + k_\alpha \alpha &= M, \end{aligned} \quad (1)$$

kjer je m masa rotirajočega dela sistema, m^* masa preostalega sistema, J_0 vztrajnostni moment rotirajočega dela okrog točke vpetja, d_y faktor upogibnega dušenja sistema, d_α faktor torzijskega dušenja sistema, k_y upogibna togost sistema, k_α torzijska togost sistema, x_T razdalja med težiščem rotirajočega dela in točko vpetja in x_0 razdalja med točko vpetja in sprednjim robom aeroprofila. Vpliv toka zraka na aeroprofil v sistemu enačb (1) je zajet z aerodinamično silo F in aerodinamičnim momentom M glede na točko vpetja.

Pri obravnavanem problemu aeroelastičnosti iščemo mejo stabilnosti sistema. Mejo dinamične stabilnosti predstavlja periodično gibanje s konstantno amplitudo. Uporabimo nastavek za harmonski odziv: $y(t) = y_0 e^{i\alpha t}$, $\alpha(t) = \alpha_0 e^{i\alpha t}$ in preverimo, pri kakšnih pogojih dobimo rešitev, ki ustreza predpostavljenemu odzivu. Za harmonsko obliko gibanja s

konstantno amplitudo zapišemo izraza za aerodinamično silo in aerodinamični moment v kompleksni domeni, kot ju navaja Forsching [2]:

$$\begin{aligned} F &= \pi \rho b \frac{l^2}{4} \left\{ \left[-1 + \frac{i}{\omega^*} 2C(\omega^*) \right] y_0 + \left[x_0 - \frac{l}{2} + l \frac{C(\omega^*)}{\omega^{*2}} + \frac{i}{\omega^*} \left(\frac{l}{2} - \left(x_0 - \frac{3l}{4} \right) 2C(\omega^*) \right) \right] \alpha_0 \right\} \omega^2 e^{i\omega t}, \\ M &= \pi \rho b \frac{l^2}{4} \left\{ \left[-x_0 + \frac{l}{2} + \frac{i}{\omega^*} \left(x_0 - \frac{l}{4} \right) 2C(\omega^*) \right] y_0 + \right. \\ &\quad \left. + \left[x_0^2 - x_0 l + \frac{9l^2}{32} + \left(x_0 - \frac{l}{4} \right) l \frac{C(\omega^*)}{\omega^{*2}} + \frac{i}{\omega^*} \left(x_0 - \frac{3l}{4} \right) \left(\frac{l}{2} - \left(x_0 - \frac{l}{4} \right) 2C(\omega^*) \right) \right] \alpha_0 \right\} \omega^2 e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (2)$$

kjer je ρ gostota zraka, $\omega^* = \omega/(2v_\infty)$ reducirana frekvenca in $C(\omega^*)$ Theodorsenova kompleksna funkcija [8]. Zapis aerodinamične sile in momenta v obliki (2) je veljaven za tanek aeroprofil z majhnimi premiki in zasuki pri pogojih potencialnega in nestisljivega toka fluida.

Z uporabo nastavka za harmonski odziv ter aerodinamične sile in momenta (2) v sistemu gibalnih diferencialnih enačb (1) pretvorimo problem v reševanje homogenega sistema dveh linearnih enačb glede na amplitudi odziva y_0 in α_0 v kompleksni domeni. Na osnovi pogoja za netrivialno rešitev tega sistema je določena vrednost kompleksne lastne frekvence $\omega = \text{Re}(\omega) + i \text{Im}(\omega)$. Iščemo pogoje za odziv s konstantno amplitudo, zato postavimo $\text{Im}(\omega) = 0$. Kompleksna enačba po komponentah predstavlja sistem dveh realnih enačb, zato poleg realne komponente lastne frekvence rešitev tega realnega sistema določa tudi vrednost reducirane frekvence, ki izpolni pogoj za netrivialno rešitev pri harmonskem odzivu s konstantno amplitudo. Tako smo na meji dinamične stabilnosti kot rešitev problema dobili krožno frekvenco flutter-ja $\omega_F = \text{Re}(\omega)$ in reducirano frekvenco flutter-ja ω_F^* . S tem je na osnovi definicije reducirane frekvence določena tudi pripadajoča hitrost toka zraka na meji dinamične stabilnosti, ki predstavlja hitrost flutter-ja:

$$v_F = \omega_F l / (2\omega_F^*). \quad (3)$$

Pri aeroelastičnem sistemu v toku zraka se lahko pojavi tudi problem statične stabilnosti. V nastavku za harmonski odziv postavimo $\omega = 0$, iz česar sledi $\omega^* = 0$, $C(\omega^*) = 1$. Tako sistem diferencialnih enačb (1) ob uporabi zvez za aerodinamično silo in moment (2) pretvorimo v homogen sistem linearnih enačb:

$$k_y y_0 + \pi \rho b l v_\infty^2 \alpha_0 = 0, \quad \left[k_\alpha - \pi \rho b l \left(x_0 - l/4 \right) v_\infty^2 \right] \alpha_0 = 0. \quad (4)$$

Iz pogoja za netrivialno rešitev sistema enačb (4) mejo statične stabilnosti oziroma hitrost divergence zapišemo kot:

$$v_D = \sqrt{k_\alpha / \left[\pi \rho b l \left(x_0 - l/4 \right) \right]}. \quad (5)$$

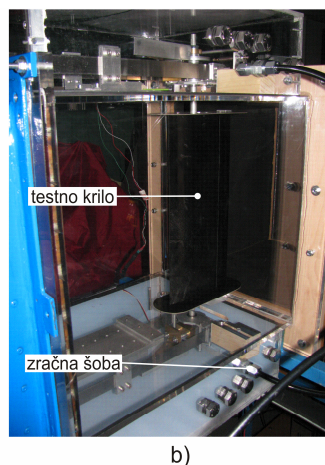
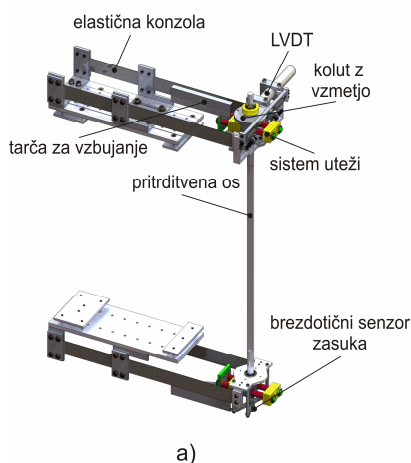
Iz sistema (4) je razvidno, da je velikost zasuka pri statičnem ravnotežju v podkritičnem področju $\alpha_0 = 0$, ko pa dosežemo mejo stabilnosti $v_\infty = v_D$, vrednost α_0 ni več definirana.

3 Preizkuševališče za določevanje meje stabilnosti aeroelastičnega sistema

Glavno izhodišče pri načrtovanju in izvedbi preizkuševališča je usklajitev s teoretičnim modelom stabilnosti aeroelastičnega sistema v naslednjih elementih:

- Izpolnitev osnovnih predpostavk teoretičnega modela (približek potencialnega hitrostnega polja, dve prostostni stopnji sistema, elastičnost vpetja, togost testnega krila).
- Možnost spreminjanja dinamskih parametrov sistema.
- Določanje meje dinamične oziroma statične stabilnosti sistema v skladu z definicijo.

Preizkuševališče sestavljajo: mehanski sistem s togim letalskim krilom, sistem za vzbujanje in merilna veriga s senzorji. Mehanski sistem preizkuševališča je pritrjen na merilno sekcijo vetrovnika in omogoča vezano upogibno in torzijsko nihanje krila znotraj merilne sekcije.



Slika 2: a) CAD model mehanskega sistema, b) Testni sistem v vetrovniku.

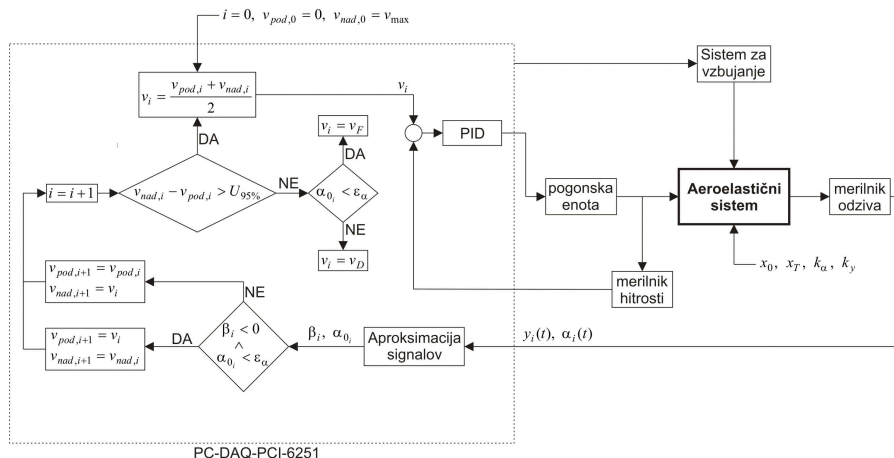
Na sliki 2a je prikazan CAD model mehanskega sistema, na sliki 2b pa testno krilo v merilni sekciji vetrovnika. Testno krilo je izdelano iz kompozitne strukture, prečni prerez krila ima obliko aeroprofila NACA 0012 z dolžino tetive $l = 0.16$ m.

Mehanski sistem omogoča spreminjanje dinamskih parametrov aeroelastičnega sistema, ki vplivajo na mejo stabilnosti. Upogibno togost sistema zvezno spreminjamo na podlagi spremembe dolžine elastičnih konzol. Torzijsko togost sistema spreminjamo na podlagi kombinacije kolotov različnih premerov in prednapetih nateznih vijačnih vzmeti različnih karakteristik. Težišče sistema spreminjamo z različnimi postavitvami uteži glede na pritrditveno os. Položaj točke vpetja pa spreminjamo na podlagi različnih mest vpetij togega krila glede na pritrditveno os sistema. Pri spreminjanju omenjenih parametrov vedno ohranjamo konstantno maso celotnega sistema in vztrajnostni moment okrog točke vpetja z ustreznimi postavitvami uteži ter z uporabo kompenzacijskih kolotov.

Sistem za vzbujanje je sestavljen iz izvora komprimiranega zraka, elektromagnetnega ventila in para zračnih šob, ki je prikazan na sliki 2b. Mehanski sistem vzbudimo z impulzno motnjo, ki jo povzroči zračni curek. Z izbiro položaja zračnih šob določimo mesto impulzne motnje na tarči za vzbujanje glede na dano razmerje upogibne in torzijske togosti.

3.1 Merilna veriga in eksperimentalni algoritem

Merilno verigo sestavljajo: pogonska enota vetrovnika s frekvenčnim regulatorjem, merilnik hitrosti v s Pitot-Prandtlovo cevjo, sistem vzbujaanja aeroelastičnega sistema z impulzno motnjo, LVDT (Sentech 75DC) za merjenje premika y in brezdotični senzor zasuka (Orange Pot QP-2HC) za merjenje zasuka α . Za generiranje, zajem in obdelavo signalov smo uporabili NI-DAQ opremo (NI PCI-6521).



Slika 3: Shema merilne verige in eksperimentalnega algoritma.

Na sliki 3 je shematsko prikazana merilna veriga s pripadajočim eksperimentalnim algoritmom za določevanje meje stabilnosti sistema. V merilni sekciji vetrovnika vzdržujemo željeno hitrost pri izbrani konfiguraciji aeroelastičnega sistema. Sistem vzbudimo z impulzno motnjo in spremljamo njegov odziv. Na podlagi vrednotenja izmerjenih signalov ožamo interval, v katerem se nahaja mejno stanje sistema ter definiramo hitrost toka zraka v naslednjem koraku. Postopek ponavljamo, dokler ne dosežemo natančnosti absolutne vrednosti merilne negotovosti merjenja hitrosti, ki je določena kot razširjena kombinirana merilna negotovost $U_{95\%}(v)$ po postopku, kot ga navaja standard ISO-GUM [4].

3.2 Identifikacija dinamskih parametrov aeroelastičnega sistema

Za določitev teoretične meje stabilnosti aeroelastičnega sistema je potrebno identificirati dejanske vrednosti dinamskih parametrov sistema. Vrednosti parametrov določimo na osnovi meritev pri nedelujočem vetrovniku ($v_\infty = 0$):

- Togosti k_y in k_α določimo na osnovi statičnih meritev za vsako prostostno stopnjo ločeno preko zveze $k_y = F/y$ oz. $k_\alpha = M/\alpha$.
- Maso sistema $m + m^*$, dušenje d_y , vztrajnostni moment J_0 in dušenje d_α določimo na osnovi meritev odziva na impulzno vzbujaanje za vsako prostostno stopnjo ločeno. Merjeni signal posameznega odziva sistema aproksimiramo s funkcijo oblike $e^{-\beta t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t)$. Z uporabo parametrov aproksimacijskih funkcij ter izmerjenih

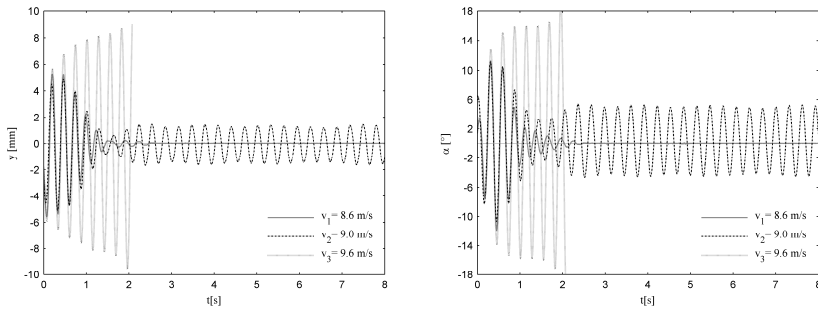
vrednosti togosti v rešitvah gibalnih enačb glede na ustrezno prostostno stopnjo, izračunamo iskane vrednosti dinamskih parametrov: $m + m^* = k_y / (\beta_y^2 + \omega_y^2)$, $d_y = 2\beta_y k_y / (\beta_y^2 + \omega_y^2)$, $J_0 = k_\alpha / (\beta_\alpha^2 + \omega_\alpha^2)$ in $d_\alpha = 2\beta_\alpha k_\alpha / (\beta_\alpha^2 + \omega_\alpha^2)$.

- Lego težišča rotirajočega dela sistema x_T določimo na osnovi poznane mase in lege težišča posamezne komponente.

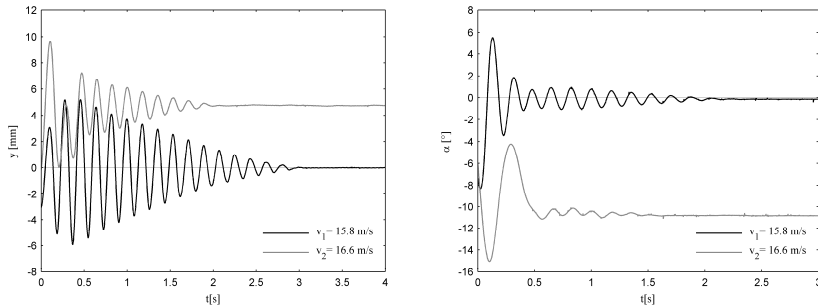
4 Rezultati in primerjava

Podani so rezultati za aeroelastični sistem z maso rotirajočega dela $m = 1.22\text{kg}$ in vztrajnostnim momentom okrog točke vpetja $J_0 = 0.00192\text{kgm}^2$.

Na sliki 4 so prikazani tipični primeri izmerjenih odzivov pri problemu dinamične stabilnosti spredaj vpetega krila. Za dano konfiguracijo hitrost v_2 predstavlja mejo dinamične stabilnosti oz. hitrost flutter-ja, saj se sistem po prehodnem pojavu ob impulzni motnji odzove s harmonskim nihanjem s konstantno amplitudo. Pri hitrosti v_1 je sistem stabilen - po prenehanju impulzne motnje se izniha v začetni legi, medtem ko je pri hitrosti v_3 dinamično nestabilen - odziv se s časom povečuje.

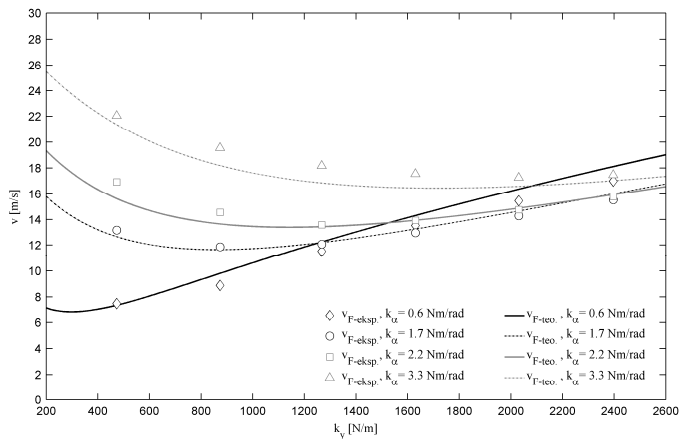


Slika 4: Izmerjeni odzivi za $x_0 = 0.04\text{m}$, $x_T = 0.023\text{m}$, $k_y = 873\text{N/m}$ in $k_\alpha = 0.6\text{Nm/rad}$.

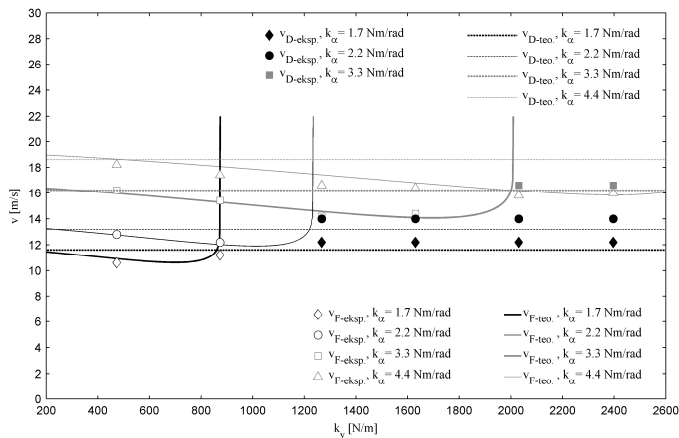


Slika 5: Izmerjeni odzivi za $x_0 = 0.1\text{m}$, $x_T = -0.0018\text{m}$, $k_y = 2030\text{N/m}$ in $k_\alpha = 3.3\text{Nm/rad}$.

Slika 5 pa prikazuje tipična primera izmerjenih odzivov pri problemu statične stabilnosti zadaj vpetega krila. Sistem je pri hitrosti v_1 stabilen, hitrost v_2 pa predstavlja mejo statične stabilnosti oz. hitrost divergence. Pri tej mejni hitrosti se sistem po prenehanju impulzne motnje ne izniha v začetni legi.



Slika 6: Teoretične in izmerjene mejne hitrosti sistema za $x_0 = 0.04\text{m}$ in $x_T = 0.023\text{m}$.



Slika 7: Teoretične in izmerjene mejne hitrosti sistema za $x_0 = 0.1\text{m}$ in $x_T = -0.0018\text{m}$.

Za različne kombinacije upogibne in torzijske togosti sistema je v diagramu na sliki 5 prikazana primerjava med teoretičnimi in izmerjenimi rezultati v primeru spredaj vpetega krila, v diagramu na sliki 6 pa v primeru zadaj vpetega krila. Pri sprednjem vpetju o stabilnosti sistema odloča hitrost flutter-ja, pri zadnjem vpetju pa v območju velikih upogibnih in majhnih torzijskih togosti mejo stabilnosti določa tudi hitrost divergence.

V tabeli 1 je za posamezno konfiguracijo parametrov podano relativno odstopanje eksperimentalnih in teoretičnih rezultatov. Kljub kompleksnosti pojava se rezultati dobro ujemajo. Med glavne vzroke za odstopanja sodi uporabljeni model viskoznega dušenja

sistema, ki sicer bistveno poenostavi teoretični model, vendar pa ne vključuje deleža strukturnega dušenja.

Tabela 1: Relativno odstopanje eksperimentalnih in teoretičnih rezultatov [%].

		$x_0 = 0.04\text{m}, x_T = 0.023\text{m}$					$x_0 = 0.1\text{m}, x_T = -0.0018\text{m}$				
$k_y [\text{N/m}]$	$k_\alpha [\text{Nm/rad}]$	0.6	1.7	2.2	3.3	4.4	0.6	1.7	2.2	3.3	4.4
473		1.8	4.3	7.5	3.1	-	-	-2.9	0.3	1.4	-2.6
873		-9.0	2.2	3.5	7.7	-	-	-3.4	1.4	0.8	-3.6
1267		-6.2	-0.9	1.2	8.1	-	-	5.2	6.1	-2.6	-4.6
1630		-5.6	-1.9	-0.3	6.3	-	-	5.2	6.1	0.7	-4.2
2030		-5.4	-2.5	-0.6	4.3	-	-	5.2	6.1	2.5	-2.2
2396		-6.2	-3.3	-0.9	2.8	-	-	5.2	6.1	2.5	3.5

5 Zaključek

V prispevku je predstavljeno preizkuševališče s pripadajočim eksperimentalnim algoritmom za določanje dinamične oz. statične meje stabilnosti večparameterskega aeroelastičnega sistema. Na osnovi primerjave teoretičnih in eksperimentalnih rezultatov za testni primer aeroelastičnega sistema ugotovimo:

- Dobro ujemanje rezultatov v celotnem parameterskem prostoru ($\sim 5\%$), torej je izvedba eksperimenta usklajena s predpostavkami teoretičnega modela.
- Zanesljivost eksperimentalnega algoritma za določanje meje stabilnosti na osnovi vrednotenja impulznega odziva sistema v časovni domeni.
- Primernost preizkuševališča za določanje in kontrolo meje stabilnosti kompleksnejših aeroelastičnih sistemov pri nadaljnjem delu.

Literatura

- [1] E. H. Dowell, H. C. Curtiss Jr., R. H. Scanlan, F. Sisto, *A modern course in aeroelasticity. Third revised and enlarged edition*, Dordrecht-Boston-London, 1981.
- [2] H. W. Försching, *Grundlagen der Aeroelastik*, Berlin-New York, 1974.
- [3] Y. C. Fung, *An Introduction to the Theory of Aeroelasticity*, New York, 1955.
- [4] ISO-GUM, *Guide to expression of uncertainty in measurement*, Geneva, 1993.
- [5] A. Kayran, *Flight flutter testing and aeroelastic stability of aircraft*, Aircraft Engineering and Aerospace Technology 79, 494--506, 1955.
- [6] M. W. Kehoe, *A Historical Overview of Flight Flutter Testing*, NASA TM-4720, 1995.
- [7] R. Ricketts, *Experimental Aeroelasticity History, Status and Future in Brief*, NASA TM-102659, 1990.
- [8] T. Theodorsen, *General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter*, NACA Rep. 496, 1935.



Numerično modeliranje poladiabatnega poskusa

A. Ilc¹, G. Turk², G. Trtnik³

Numerical modelling of semi-adiabatic test

Povzetek. V prispevku je predstavljena možnost uporabe poladiabatnega poskusa za določitev adiabatske krivulje, s katero opišemo sproščanje hidratacijske toplote svežega betona. Pri tem poskusu tako merimo temperaturo v nekaj točkah betonskega preizkušanca, nato pa z računsko korekcijo, s katero upoštevamo toplotne izgube, določimo adiabatsko krivuljo. Ta nato predstavlja vhodni podatek za numerični model preizkušanca, s katerim z metodo končnih elementov izračunamo temperaturni potek na merilnih mestih. Primerjava med izmerjenimi in izračunanimi vrednostmi temperatur potrjuje tako primernost uporabe poladiabatne metode za določitev adiabatske krivulje kot tudi ustreznost samega numeričnega modela.

Abstract. The paper deals with the possibility of using a semi-adiabatic test to determine the adiabatic hydration curve of concrete mixtures. Therefore, a temperature was measured at certain points of a concrete specimen during the test and an adiabatic temperature rise was estimated with a numerically determined heat loss compensation. The determined adiabatic hydration curve was inserted into a numerical program, which is used to calculate a temperature field within the concrete element using a finite element method. A comparison between numerically and experimentally determined values indicates the adequacy of the proposed numerical model. Moreover, the semi-adiabatic test proved to be an appropriate method to determine the adiabatic temperature rise.

1 Uvod

Sproščanje hidratacijske toplote med strjevanjem betona pri gradnji večine gradbenih konstrukcij ne povzroča težav, nasprotno pa lahko pri masivnih betonskih konstrukcijah zaradi oteženega odvajanja toplote povzroča pregrevanje betona, kar lahko vodi v nižjo trdnost betona in nastanek razpok. Zato moramo pri betonih večje debeline temperaturni potek vnaprej oceniti. V literaturi je predstavljenih veliko numeričnih postopkov za temperaturno analizo betona med strjevanjem, zasnovanih na diferenčni metodi [9] oziroma na metodi končnih elementov [2, 4, 9].

¹ Primorje d. d.

² Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

³ Igmat d. d.

Za računsko napoved razvoja temperaturnega polja v betonskih elementih potrebujemo adiabatno krivuljo, ki opisuje dvig temperature zaradi hidratacije cementa v adiabatnih pogojih, kar pomeni, da je beton od okolice popolnoma izoliran. Adiabatno krivuljo določimo z adiabatnim ali s poladiabatnim poskusom [7] oziroma jo ocenimo na podlagi sestave betona [5]. Pri adiabatnem poskusu preprečujemo izgubo energije tako, da skušamo s temperaturo okolice betona čimbolj slediti temperaturi strujočega se betona, medtem ko pri poladiabatnem poskusu preizkušane le izoliramo, nastale toplotne izgube pa opišemo z računsko korekcijo, ki jo prištejemo izmerjenim vrednostim.

V prispevku je prikazan postopek določitve adiabatne krivulje s poladiabatnim poskusom na podlagi merjenja temperature betona v vnaprej izbranih karakterističnih točkah betonskega preizkušanca. Iz rezultatov meritev je z računsko korekcijo, s katero upoštevamo toplotne izgube, določena adiabatna krivulja, ki predstavlja vhodni podatek numeričnega modela za izračun temperaturnega polja v betonskih elementih. Na podlagi primerjave med izmerjenimi in izračunanimi vrednostmi je ocenjena upravičenost računske korekcije pri poladiabatnem poskusu.

2 Prevajanje toplote po betonu

Časovno spreminjanje temperatur v strujočem se betonu določimo z rešitvijo znane Fourierove parcialne diferencialne enačbe prevajanja toplote v trdni snovi

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q. \quad (1)$$

Enačbo (1) rešimo z upoštevanjem naslednjih robnih in začetnih pogojev:

$$k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y + k_z \frac{\partial T}{\partial z} n_z + h (T - T_A) + \sigma e (T^4 - T_R^4) = 0, \quad (2)$$

$$T(x, y, z, t) = T_B(t), \quad (3)$$

$$T(x, y, z, 0) = T_0(x, y, z), \quad (4)$$

kjer sta ρ in c_p gostota in specifična toplota betona, k_x , k_y in k_z pa so toplotne prevodnosti betona v smereh x , y in z . V enačbah (1–4) je $T = T(x, y, z, t)$ temperatura betona pri času t , Q pa je sproščena hidratacijska toplota betona, ki jo določimo na osnovi adiabatnega ali poladiabatnega poskusa. V enačbi (2) so n_x , n_y in n_z označene komponente vektorja normale na robno ploskev, T_A je temperatura okolice, h prestopni koeficient zraka, T_R temperatura sevajočih teles v okolici obravnavane konstrukcije, σ Stefan – Boltzmanova konstanta in e emisivnost sevajoče površine. T_B v enačbi (3) je predpisana temperatura na površini betonskega elementa, T_0 v enačbi (4) pa je začetna temperatura betona.

Skladno z metodo končnih elementov lahko enačbo (1) zapišemo v diskretizirani obliki [4]

$$\mathbf{Kt} + \mathbf{Ct}_t = \mathbf{f}, \quad (5)$$

kjer so \mathbf{K} , \mathbf{C} in \mathbf{f} globalna prevodnostna matrika, globalna kapacitetna matrika in globalni vektor desnih strani, \mathbf{t} je vektor vozliščnih temperatur, \mathbf{t}_t pa vektor časovnih odvodov vozliščnih temperatur.

Sproščeno toploto $Q_a(t)$ v adiabatnih razmerah določimo na osnovi adiabatsne krivulje $T_a(t)$ z enačbo

$$Q_a(t) = T_a(t) \rho c_p. \quad (6)$$

V literaturi zasledimo različne enačbe za modeliranje adiabatsne krivulje [1, 3, 6]. V prikazanem numeričnem postopku modeliramo adiabatsno krivuljo s krivuljo sigmoidne oblike [1]

$$T_a(t) = a + b \cdot e^{-(c/t)^d}, \quad (7)$$

pri čemer materialne parametre a , b , c in d določimo z metodo najmanjših kvadratov za vsako betonsko mešanico posebej.

Ker adiabatsnih pogojev običajno ni, moramo količino sproščene hidratacijske toplote betona ustrezno popraviti. S tem namenom vpeljemo zrelostno funkcijo f_A , s katero v analizi upoštevamo vpliv temperature in časa na sproščanje hidratacijske toplote. V našem modelu smo uporabili Arrheniusovo zrelostno funkcijo, ki jo določa enačba

$$f_A(T, Q_a) = \exp \left(-\frac{E_A}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{\left(\frac{Q_a}{\rho c_p} \right) + T_0^a} \right) \right). \quad (8)$$

V enačbi (8) R predstavlja plinsko konstanto ($R = 8,315$ J/mol K), E_A aktivacijsko energijo, T_0^a pa začetno temperaturo betona pri adiabatsnem preizkusu. Količino sproščene hidratacijske toplote v betonski konstrukciji izrazimo z enačbo

$$Q = f_A \cdot Q_a. \quad (9)$$

3 Poladiabatni poskus

Za pet betonskih mešanic smo izvedli poladiabatne poskuse, kot je opisano v članku [7]. Preizkušane v obliki kocke s stranico 50 cm je obdan z 10 cm ekstrudiranega polistirena in z 2,8 cm debelim lesenim opažem. Ker je kocka glede na tri ravnine popolnoma simetrična, smo temperaturni potek merili le na mestih, označenih na sliki 1.

Pri poladiabatnem poskusu dopustimo toplotne izgube, zato jih moramo oceniti in računsko upoštevati. Če označimo pravi adiabatsni dvig temperature s T_G , povprečno temperaturo betona s T_V in začetno temperaturo betona s T_P , potem so toplotne izgube H_L sorazmerne z razliko med adiabatsnim dvigom temperature in dejanskim dvigom temperature $T_V - T_P$:

$$H_L = V_C \cdot \rho_C \cdot c_C (T_G - (T_V - T_P)), \quad (10)$$

kjer so V_C , ρ_C in c_C prostornina, gostota in specifična toplota betonskega preizkušanca.

Če označimo s k skupno toplotno prevodnost ovoja in napišemo nadomestno enodimenzijsko Fourierjevo enačbo (1) za ovoj, lahko izrazimo toplotne izgube kot:

$$\frac{\partial H_L}{\partial t} = k(T_S - T_A), \quad (11)$$

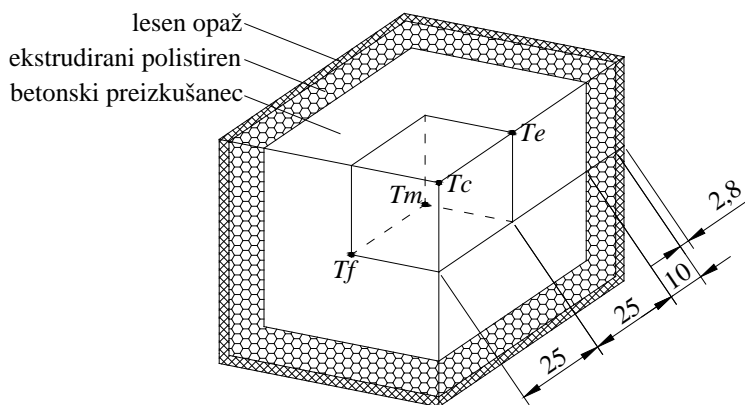
kjer je T_S povprečna temperatura betonskega preizkušanca, T_A pa temperatura okolice.

Z združitvijo enačb (10) in (11) lahko izrazimo adiabatni dvig temperature T_G kot:

$$T_G = (T_V - T_P) + \lambda \int_0^t (T_S - T_A) dt, \quad (12)$$

pri čemer je $\lambda = \frac{k}{V_C \rho_C c_C}$ karakteristika posameznega poskusa in jo določimo po koncu sproščanja hidratacijske toplote z odvajanjem enačbe (12) po času ob predpostavljenem konstantnem adiabatnem dvigu temperatur T_G . Tako dobimo:

$$\lambda = - \frac{\frac{\partial T_V}{\partial t}}{(T_S - T_A)}. \quad (13)$$



Slika 1: Geometrija preizkušanca pri adiabatnem poskusu in merilna mesta.

Povprečno temperaturo betonskega preizkušanca T_V in povprečno temperaturo njegove površine T_S izračunamo iz izmerjenih temperatur (slika 1) po enačbah, podanih v članku [7]:

$$T_V = \frac{64}{125} T_m + \frac{48}{125} T_f + \frac{12}{125} T_e + \frac{1}{125} T_c, \quad (14)$$

$$T_S = \frac{16}{25} T_f + \frac{8}{25} T_e + \frac{1}{25} T_c. \quad (15)$$

4 Primerjava med eksperimentalnimi in numeričnimi rezultati

Da bi ugotovili primernost opisanega postopka poladiabatnega poskusa, smo adiabatni dvig temperature, ki smo ga dobili s poladiabatnim poskusom preko računske korekcije po enačbi (12), aproksimirali s krivuljo sigmoidne oblike (enačba 7, preglednica 1) in jo uporabili kot vhodni podatek v računalniškemu programu za račun poteka temperatur po trdni snovi, pripravljenim na osnovi enačb v drugem poglavju. V nadaljevanju smo izračunane vrednosti temperatur na mestih meritev primerjali z izmerjenimi vrednostmi.

4.1 Numerični model

Za določitev poteka temperatur smo pripravili dva numerična modela. Najprej smo potek temperatur v kocki modelirali z ravninskim potekom temperatur (2D model), drugi model pa je tridimenzionalen (3D model). Pri obeh modelih smo upoštevali simetrijske ravnine kocke, tako da smo obakrat modelirali le njen del. Pri 2D modelu mrežo sestavlja 121 štirivozliščnih

izoparametričnih končnih elementov, pri 3D modelu pa 1331 osemvozliščnih izoparametričnih končnih elementov.

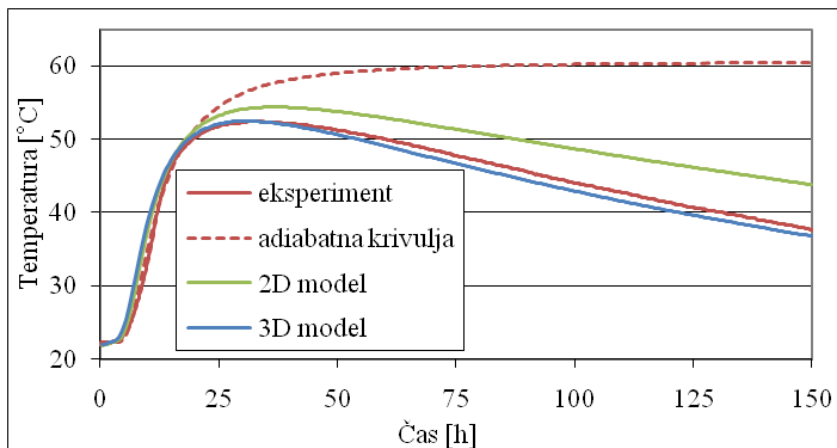
Ker ostali materialni parametri, ki jih potrebujemo pri računu, niso bili izmerjeni, smo v analizi za te predpostavili vrednosti, dobljene v literaturi [9] in prikazane v preglednici 2. Temperatura zraka je bila približno 20°C, za prestopni koeficient zraka pa smo izbrali vrednost 50000 J/h m² °C, kar ustreza mirnemu ozračju v laboratoriju. Za vrednost aktivacijske energije smo izbrali 44500 J/mol [8]. Temperature v vozliščih končnih elementov smo zaradi relativno dolgega obdobja merjenja računali na vsake pol ure. Za časovno integracijo enačbe (5) smo uporabili implicitno metodo.

Preglednica 1: Parametri adiabatne krivulje in začetna temperatura betona.

Oznaka mešanice	a [°C]	b [°C]	c [1/h]	d	$T0$ [°C]
A1	1,48	42,88	10,99	3,55	13,5
A2	1,21	44,60	11,63	3,22	16,3
B1	0,48	38,33	10,5	2,01	21,8
B2	2,46	31,61	25,17	1,20	22,2
B3	1,44	40,9	16,61	2,45	22,5

Preglednica 2: Materialni parametri.

Material	k [J/m h °C]	c [J/kg °C]	ρ [kg/m ³]
Beton	9200	1000	2430
Ekstrudirani polistiren	118	1450	25
Les	470	2800	500



Slika 2: Temperatura v središču poladiabatnega preizkušanca - primerjava med 2D in 3D modelom za beton B1.

4.2 Primerjava med dvo- in tridimenzionalnim modelom

Slika 2 prikazuje primerjavo med rezultati dvodimenzionalnega (2D) in tridimenzionalnega (3D) modela. Pri 2D modelu smo s predpostavko o ravninskem temperaturnem stanju predpostavili, da sta ploskvi kocke, ki sta vzporedni z obravnavano ravnino, popolnoma izolirani. Tako se toplota izgublja le skozi štiri in ne skozi šest ploskev, kot pri realnejšem 3D modelu, zato je razlika med končno temperaturo središča preizkušanca in adiabatnim potekom pri 2D modelu le dve tretjini tiste pri 3D modelu. Rezultati zadnjega se posledično bolje ujemajo z eksperimentalnimi podatki in v nadaljevanju tako prikazujemo le rezultate 3D modela.

4.3 Primerjava med eksperimentalnimi in numeričnimi rezultati

V preglednici 3 je prikazana primerjava med rezultati, dobljeni z numeričnim računom za 3D model, in rezultati eksperimenta. V tem primeru se izmerjena in izračunana najvišja dosežena temperatura ujemata na $1,5^{\circ}\text{C}$ natančno. Do razlik pride zaradi aproksimacije adiabatne krivulje s krivuljo sigmoidne oblike (enačba 7), zaradi predpostavljenih materialnih parametrov in pa zaradi napake metode poladiabatnega poskusa. Iz slike 3 vidimo, da se tudi potek temperatur po preizkušancu za celo obdobje trajanja preizkusa dobro ujema.

Preglednica 3: Primerjava eksperimentalno in numerično določene najvišje dosežene temperature.

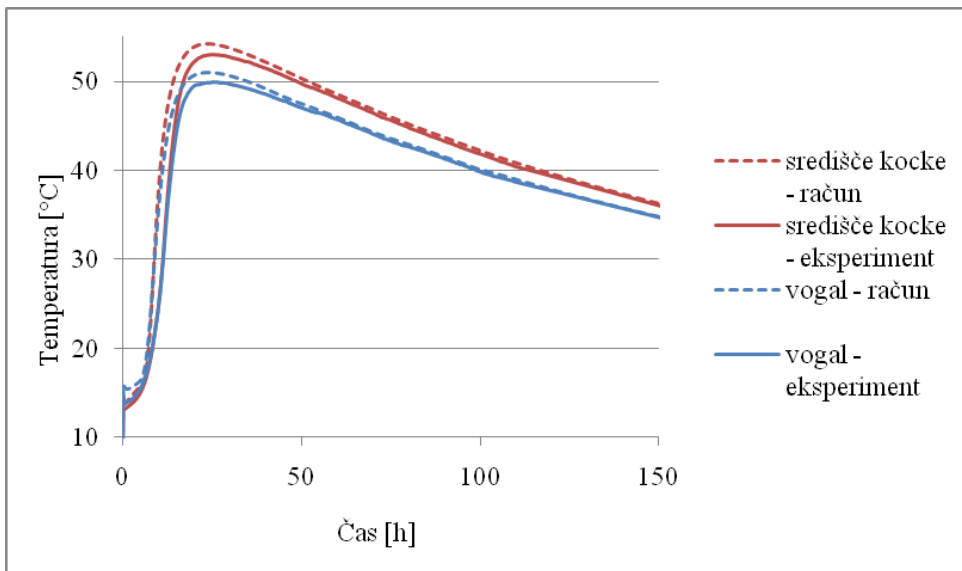
Oznaka mešanice	$T_{max} [^{\circ}\text{C}]$		razlika [$^{\circ}\text{C}$]
	eksperiment	račun	
A1	53,0	54,2	1,2
A2	56,8	56,6	-0,2
B1	52,4	52,5	0,1
B2	46,2	44,8	-1,4
B3	56,2	54,7	-1,5

Med obravnavanimi betoni izstopa mešanica B2, saj ima visok delež mineralnega dodatka, zato je njena z eksperimentom določena adiabatna krivulja drugačna od ostalih in se slabo prilega funkciji, podani z enačbo 7 (slika 4). Tako smo jo aproksimirali še s funkcijo:

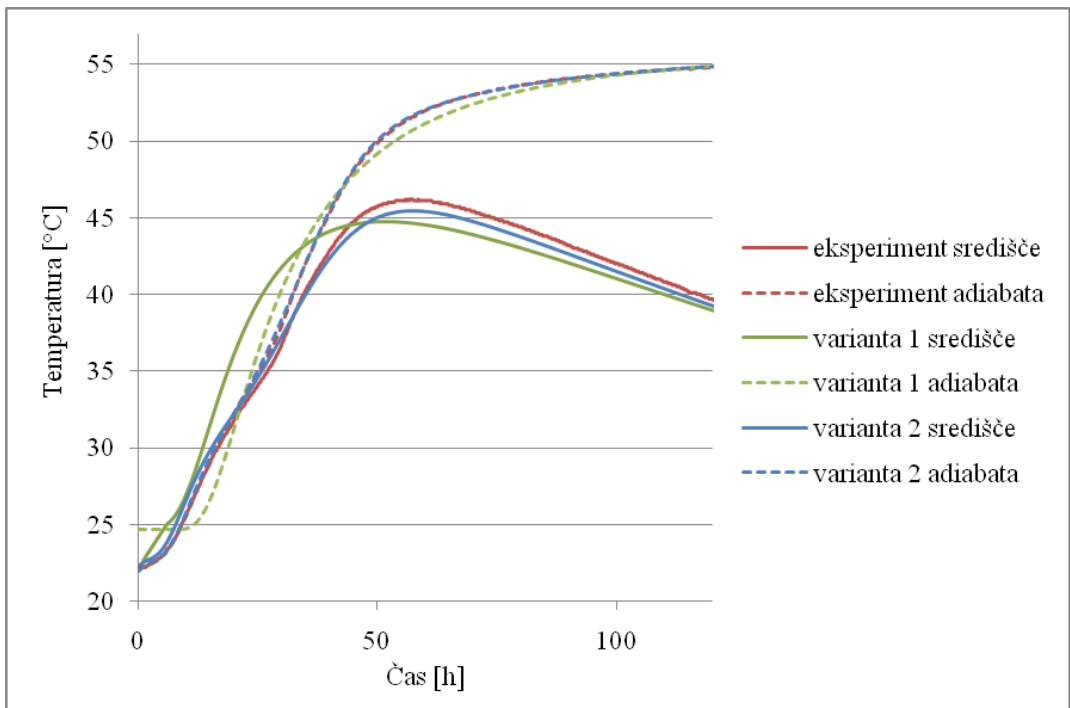
$$T(t) = b_1 e^{-(t/c_1)^{d_1}} + b_2 (1 - e^{-c_2(t-d_2)}) + b_3 e^{-(c_3(t-d_3)^2)}, \quad (16)$$

kjer so vrednosti parametrov: $b_1 = 23,69$, $c_1 = 16,85$, $d_1 = 1,39$, $b_2 = 10,52$, $c_2 = 0,0486$, $d_2 = -1,53$, $b_3 = -8,10$, $c_3 = 0,00348$ in $d_3 = 24,28$.

Iz slike 4 vidimo, da se tako določena adiabatna skoraj povsem prekriva z eksperimentalno določeno krivuljo, zato se tudi potek temperature bolje prilega eksperimentalno določenim vrednostim. Najvišja dosežena temperatura znaša $45,5^{\circ}\text{C}$ in je le še za $0,7^{\circ}\text{C}$ nižja od izmerjene vrednosti (preglednica 3). Ta napaka je lahko posledica napake poladiabatnega poskusa ali pa napake v oceni materialnih parametrov.



Slika 3: Temperatura v središču in v vogalu poladiabatnega preizkušanca - primerjava med izračunanimi in eksperimentalno določenimi vrednostmi za beton A1.



Slika 4: Primerjava med potekom adiabatnih krivulj in temperatur v središču za beton B2. Pri varianti 1 je adiabata aproksimirana z enačbo (7), pri varianti 2 pa z enačbo (16).

5 Zaključek

V prispevku smo prikazali numerični model poladiabatnega poskusa, pri katerem z računsko korekcijo določimo adiabatno krivuljo sproščanja hidratacijske toplote.

Preizkušane v obliki kocke s stranico 50 cm smo modelirali z 2D in 3D modeloma. Medsebojna primerjava rezultatov kaže, da 2D model za tako geometrijo ne da dovolj dobrih rezultatov, ker ne upošteva izgub skozi dve mejni ploskvi.

Rezultate tridimenzionalnega numeričnega modela smo primerjali z vrednostmi temperatur, izmerjenih pri poladiabatnem poskusu. Rezultati se dobro ujemajo, največja razlika med izmerjeno in izračunano najvišjo doseženo temperaturo je 1,5°C, z natančnejšo aproksimacijo adiabatne krivulje z matematično funkcijo pa se razlike še zmanjšajo. Iz tega lahko najprej sklepamo, da opisani numerični model dobro opiše preizkušane. Relativno majhna razlika med izmerjenimi in izračunanimi temperaturami kaže tako na primernost opisanega numeričnega postopka za napoved temperaturnega polja v preizkušancu kot tudi na ustreznost uporabe poladiabatnega poskusa za določitev adiabatne krivulje betonske mešanice.

Zahvala

Raziskavo sta financirala Evropska unija iz Evropskega socialnega sklada in Ministrstvo za visoko šolstvo, znanost in tehnologijo v sklopu projekta Mladi raziskovalci iz gospodarstva.

Literatura

- [1] C. Ammar, P. Dutron, H. Motteu, J. Dubois, *La progression des betons et des mortiers par basses temperatures*, C.S.T.C. - C.R.I.C. - SECO, Bruxelles, 1973.
- [2] J. M. Araujo, A. M. Awruch, *Cracking safety evaluation on gravity concrete dams during the construction phase*, Computers & Structures 66, 1, 93-104, 1998.
- [3] K. Van Breugel, *Simulation of Hydration and Formation of Structure of Hardening Cement-Based Materials – HYMOSTRUC*, doktorska disertacija, Delft University of Technology, Delft, 1997.
- [4] R. Cook, D. Malkus, M. Plesha, *Concepts and applications of finite element analysis*, Wiley, New York, 1989.
- [5] K. Maekawa, R. Chaube, T. Kishi, *Modelling of concrete performance*, Routledge, New York, 1999.
- [6] P. Morabito, *Apparent Activation Energy - An example for determination from adiabatic hydration tests*, IPACS report BE96-3043/2001:19-2, Lulea, Sweden, 2001.
- [7] P. L. Ng, I. Y. T. Ng, A. K. H. Kwan, *Heat loss compensation in semi-adiabatic curing test of concrete*, ACI materials journal 105 (1), 52-61, 2008.
- [8] A. K. Schindler, T. Dossey, B. F. McCullough, *Temperature control during construction to improve the long term performance of portland cement concrete pavements*, Texas Department of Transportation, Research project No. 0-1700-2, The University of Texas at Austin, 2002.
- [9] G. Turk, *Programska oprema za račun nelinearnega in nestacionarnega prevajanja toplote z upoštevanjem raznih robnih pogojev in notranjega vira toplote zaradi hidratacije cementa*, diplomska naloga, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 1987.



Vpliv velikosti razpoke na faktor intenzitete napetosti v natezno obremenjeni plošči z izvrtino

D. Jagarinec,¹ N. Gubeljak², J. Predan³

Influence of crack size on Stress Intensity Factor in tensile loaded plate with hole

Povzetek. V prispevku je analiziran vpliv geometrijskih parametrov na faktor intenzitete napetosti (FIN) v plošči s sredinsko izvrtino s stališča linearno elastične mehanike loma (LEML) in elasto plastične mehanike loma (EPML). Med tem, ko v LEML inženirsko lahko opredelimo vpliv luknje na lomno obnašanje glede na velikost razpoke s končno vrednostjo, v EPML se vrednosti J integrala skozi debelino plošče od površine proti notranjosti spreminja.

Abstract. In article is dealing with the influence of geometric parameters on stress intensity factor (SIF) in the plate with a centre hole with views of the linear elastic fracture mechanics (LEFM) and elasto plastic fracture mechanics (EPFM). Effect of hole size on short crack is possible to distinguish by using engineering approach in LEFM, mean time it is difficult to determined such effect in EPFM since the values of J integral are vary through the thickness of the plate.

1 Uvod

Izvrtina v konstrukcijski komponenti kot je plošča, ki je obremenjena na nateg zaradi koncentracije napetosti predstavlja mesto na katerem lahko nastane utrujenostna razpoka. Za oceno nevarnosti prisotnosti razpoke v plošči potrebno je opraviti analizo celovitosti konstrukcije. Pri določitvi faktorja intenzitete napetosti (FIN) prisotnost bližine luknje bistveno vpliva na višino in porazdelitev napetosti. Prispevek analizira vpliv geometrijskih parametrov na faktor intenzitete napetosti (FIN) v plošči s sredinsko izvrtino s stališča linearno elastične mehanike loma (LEML) in elasto plastične mehanike loma (EPML). Rezultati kažejo, da se vrednosti J integrala skozi debelino plošče, vzdolž razpoke

¹ Podiplomski študent, Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

² Red. prof. dr., predstojnik Inštituta za mehaniko, Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

³ Doc. dr., asistent, Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

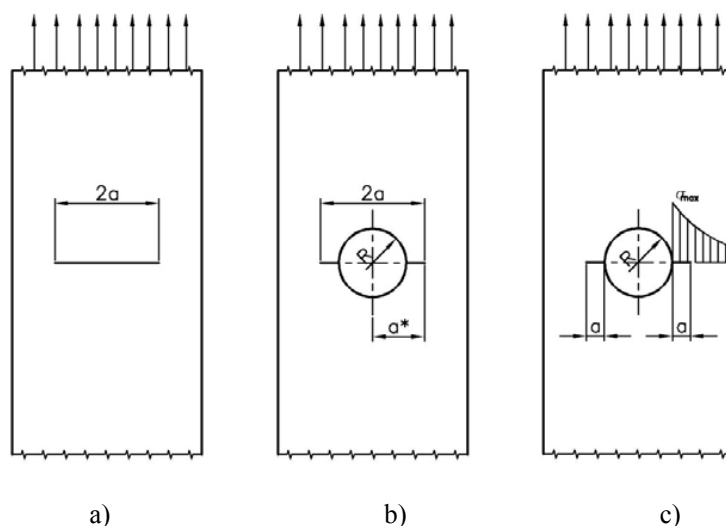
spreminjajo, zaradi česar pri analizi celovitosti konstrukcij ne moremo upoštevati le eno samo vrednostjo FIN.

2 Aplikacija linearno elastične mehanike loma – LEML

Prikazana bosta dva postopka za oceno velikosti kratke oz. dolge utrujenostne razpoke. V kolikor lahko po velikosti razpoko obravnavamo kot dolgo, takrat je pri analizi celovitosti za FIN in mejne obremenitve možno uporabiti enačbe, ki so določene v standardih in priročnikih. V kolikor je razpoka kratka in material duktilen, takrat je potrebno opraviti numerično elasto-plastično analizo za določitev FIN in mejne obremenitve ob upoštevanju dejanskih mehanskih lastnosti materiala. Prvi postopek je splošni analitični, med tem, ko je drugi postopek določen v skladu z dostopno literaturo EFAM ETM 97[1], oz. po članku Troyani, Gomes, Sterlaci[2] za določitev faktorja koncentracije napetosti.

2.1 Splošni postopek

Globalni pristop je poenostavljen način določanja vrednosti faktorja intenzitete napetosti-FIN, ki je razširjen v inženirski uporabi. Globalni pristop temelji na teoretični analizi na nateg obremenjene plošče z sredinsko razpoko dolžine $2a$, kot ga je izpeljal Griffith [3]. V praksi je pogost primer nosilca, ki je zaradi spajanja z drugimi konstrukcijskimi elementi izdelan z izvrtino. V primeru, če je na nateg obremenjena plošča z izvrtino znanega polmera R , ima luknja dodaten vpliv na razpoko, ki je nastala na mestu največje koncentracije napetosti. V plošči končnih dimenzij, je potrebno upoštevati velikost izvrtine za izračun FIN. V primeru če je izvrtina relativno majhna na velikost razpoke, luknja globalno nima vpliva na FIN. Tako vpliv velikosti luknje lahko opredelimo kot globalni nivo (slika 1a,b) in lokalni nivo (slika 1c), ko premer izvrtine vpliva na FIN. V globalnem nivoju je efektivna dolžina razpoke seštevek polmera izvrtine in dolžine razpoke. V lokalnem nivoju je upoštevana luknja s faktorjem intenzitete napetosti in dejanska dolžina razpoke.



Slika 1: Globalni nivo (a,b) in lokalni nivo (c)

V LEML lahko FIN na globalnem nivoju ocenimo s pomočjo izraza:

$$\begin{aligned}
 K_I &= \sigma \sqrt{\pi \cdot a^*} \cdot Y\left(\frac{a}{w}\right) - FIN \\
 Y\left(\frac{a}{w}\right) &= 1 \text{ - oblikovni faktor} \\
 a^* &= R + a \text{ - efektivna dolžina razpoke} \\
 K_I &= \sigma \sqrt{\pi \cdot (R + a)}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Na lokalnem nivoju bo vrednost FIN potemtakem enaka maksimalni napetosti zaradi prisotnosti luknje σ_{\max} in nastali kratki dolžini razpoke a :

$$\begin{aligned}
 K_I &= \sigma_{\max} \sqrt{\pi \cdot a} \cdot Y\left(\frac{a}{w}\right) - FIN \\
 Y\left(\frac{a}{w}\right) &= 1 \text{ - oblikovni faktor} \\
 \sigma_{\max} &= \sigma \cdot k \text{ - maksimalna napetost} \\
 K_I &= \sigma \cdot k \sqrt{\pi \cdot a}
 \end{aligned} \tag{2}$$

V mejnem primeru, obe vrednosti FIN morata biti enaki na globalnem in lokalnem nivoju. V premeru, če je FIN enak po obeh kriterijih (po lokalnem in globalnem) obe enačbi (1) in (2) lahko enačimo:

$$\begin{aligned}
 \sigma \cdot k \sqrt{\pi \cdot a} &\geq \sigma \sqrt{\pi \cdot (R + a)} \\
 k \sqrt{\pi \cdot a} &\geq \sqrt{\pi \cdot (R + a)} \\
 a &\geq \frac{R}{k^2 - 1}
 \end{aligned} \tag{3}$$

Enačba (3) nam da velikost razpoke pri kateri lahko obravnavamo ploščo z luknjo in razpoko, kot da bi bila konstrukcijska komponenta na nateg obremenjena plošča le z razpoko dolžine:

$$2a^* = 2R + 2a \tag{4}$$

Če vzamemo, da je faktor koncentracije napetosti $k=3$ dobimo,

$$\begin{aligned}
 a &\geq \frac{R}{k^2 - 1} \\
 a &\geq \frac{R}{8}
 \end{aligned} \tag{5}$$

da je dolžina razpoke $1/8$ premera izvrtine. Torej pri določitvi utrujenostne razpoke, ki je večja od $1/8 R$ lahko uporabimo globalni kriterij brez upoštevanja premera izvrtine za določitev FIN.

2.2 Postopek po EFAM ETM 97

Postopek je enak kot prejšnji, kjer primerjamo globalni in lokalni kriterij. Enačbe za FIN so povzete po literaturi [1], vrednosti faktorja koncentracije napetosti k pa po literaturi [2].

Globalni nivo:

$$\begin{aligned}
 K_I &= \sigma \sqrt{\pi \cdot a^*} \cdot Y\left(\frac{a}{W}\right) \\
 a^* &= R + a \\
 Y\left(\frac{a}{W}\right) &= \left[1 - 0,025 \left(\frac{2a}{W}\right)^2 + 0,06 \left(\frac{2a}{W}\right)^4 \right] \sqrt{\sec\left(\frac{a\pi}{W}\right)} \approx 1 \\
 K_I &= \sigma \sqrt{\pi \cdot (R + a)}
 \end{aligned} \tag{6}$$

Lokalni nivo:

$$\begin{aligned}
 K_I &= 1,1215 \cdot \sigma_{\max} \sqrt{\pi \cdot a} \cdot Y\left(\frac{a}{R}\right) \\
 \sigma_{\max} &= \sigma \cdot k \\
 Y\left(\frac{a}{R}\right) &\approx 1 \\
 K_I &= 1,1215 \cdot \sigma \cdot k \sqrt{\pi \cdot a}
 \end{aligned} \tag{7}$$

V premeru, če je FIN enak po obeh kriterijih (po lokalnem in globalnem) premer luknje ne vpliva na izmerjeno vrednosti FIN v LEML.

$$\begin{aligned}
 1,1215 \cdot \sigma \cdot k \sqrt{\pi \cdot a} &\geq \sigma \sqrt{\pi \cdot (a + R)} \\
 1,1215^2 \cdot \sigma^2 \cdot k^2 \cdot \pi \cdot a &\geq \sigma^2 \cdot \pi \cdot (a + R) \\
 a &\geq \frac{R}{1,1215^2 \cdot k^2 - 1}
 \end{aligned} \tag{8}$$

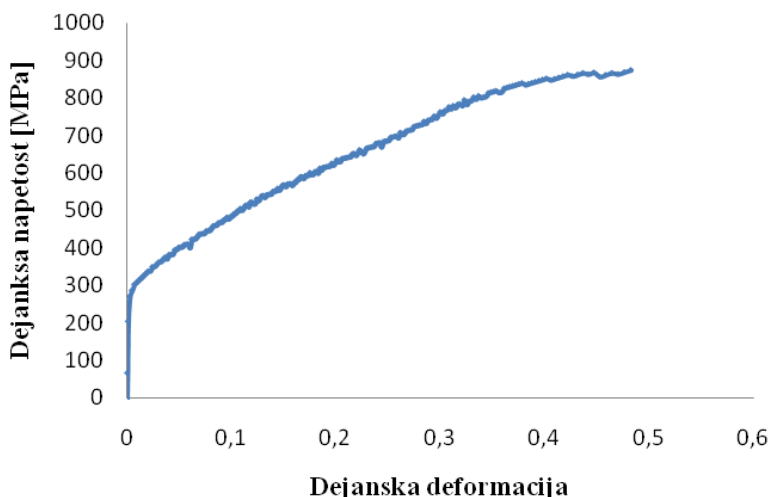
Ob upoštevanju faktorja koncentracije napetosti po članku [2] $k=2,65$, dobimo vrednost mejne velikosti razpoke a :

$$\begin{aligned}
 a &\geq \frac{R}{1,1215^2 \cdot k^2 - 1} \\
 a &\geq \frac{R}{1,1215^2 \cdot 2,65^2 - 1} \\
 a &\geq 0,128 \cdot R
 \end{aligned} \tag{9}$$

3 Material

Numerična analiza je opravljena za nerjavno jeklo X2CrNiMo 17-12-2 (W.Nr. 1.4404). Materialni podatki so naslednji: meja plastičnosti $R_{p0,2}=280$ MPa, natezna trdnost $R_m=575$ MPa, modul elastičnosti $E=188$ Ga. Podatki so dobljeni z nateznim preizkusom na

preizkuševalnem stroju INSTRON 1255-8500. Pri numerični analizi je upoštevana dejanska krivulja napetost-deformacija (slika 2), ki je dobljena s nateznim preizkusom.



Slika 2: Dejanska krivulja "Napetost-deformacija"

4 Numerična analiza

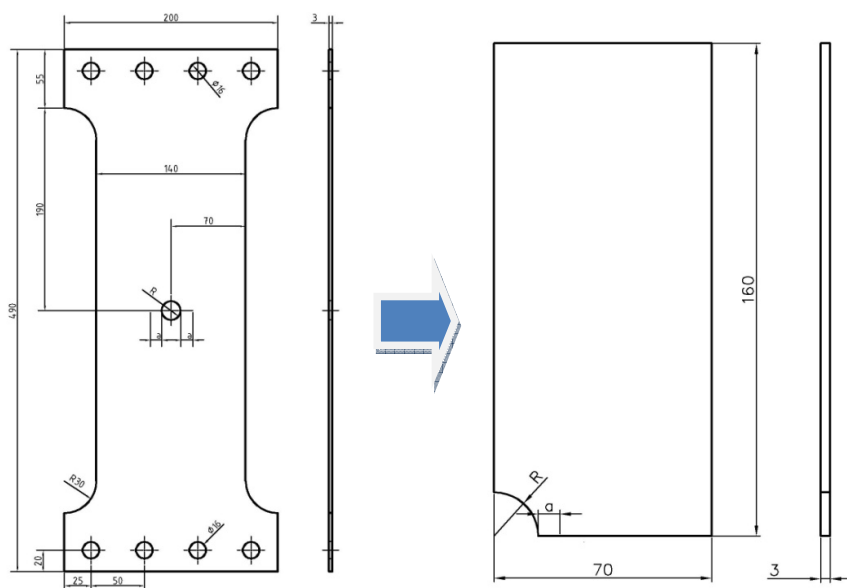
Namen numerične analize je določiti vrednost J-integrala kot elastično-plastičnega parametra mehanike loma na konici razpoke ob luknji s polmerom R .

4.1 Numerični model epruvete

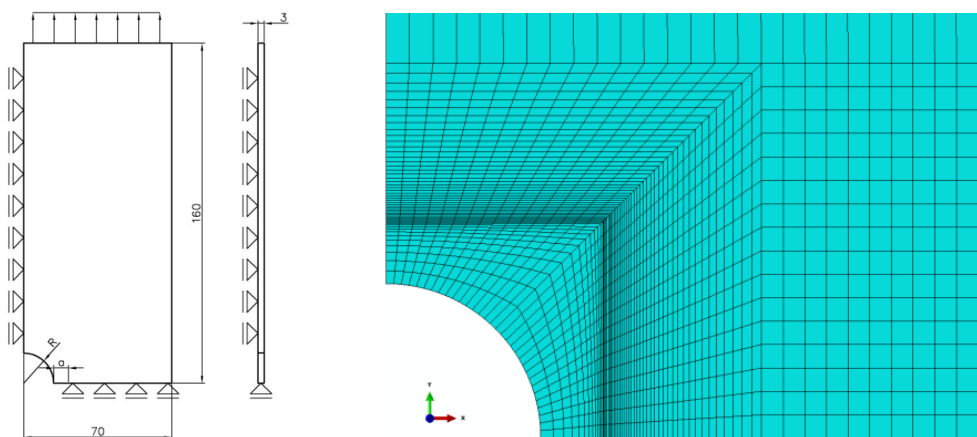
Slika 3 nam prikazuje dejansko epruveto in model epruvete pripravljen za analizo. Numerične analize so izvedene s programom Abaqus CAE 6.10 [4]. Numerični 3D model je narejen le za $\frac{1}{4}$ plošče z sredinsko luknjo. V smeri debeline je tudi upoštevana le polovica debeline epruvete. Zgornji del epruvete je toga vpet in ga ni potrebno analizirati. Obremenjevanje je potekalo od 0 do 120 MPa globalne napetosti na togem zgornjem delu.

4.2 Robni pogoji in mreža končnih elementov

Epruveta je vpeta v x, y, z smeri. Upoštevana je simetrija (XSYMM, YSYMM, ZSYMM). Obremenitev je natezna $s=120$ MPa na zgornji strani epruvete. Polmer izvrtine je $R=9$ mm. Na mestu razpoke dolžine a model epruvete ni vpet, kot je prikazano na sliki 3. Mreža je hexagonalna in strukturirana. Zgostitev mreže pri najbolj kritičnih delih, pri izvrtini in pri razpoki. Pomiki v ravnini razpoke, ki leži v horizontalni simetrali luknje so omejeni v navpični smeri in prosti v horizontalni smeri. Na mestu konice razpoke je narejena strukturirana mreža z izparametričnimi elementi z vmesnimi vozlišči.



Slika 3: Plošča s sredinsko luknjo in razpoko



Slika 4: Robni pogoji in mreža končnih elementov

5 Rezultati in diskusija

Ploščo z razpoko, ki je večja od $a=1,13$ mm po enačbi (5), oziroma $a=1,15$ mm po en. (9), po EFAM ETM 97, lahko uporabimo globalni kriterij, ker premera izvrtine nima vpliva na določitev FIN. Iz rezultatov je vidno, da je splošni postopek neprimeren zaradi velike razlike med FIN-i v globalnem in lokalnem nivoju. Faktorji intenzitete napetosti po postopku EFAM ETM 97 (tabela 2) so po doseganju izračunate mejne velikosti razpoke $a=1,15$ mm

približujejo enaki vrednosti (lokalno-globalno). Zato je postopek po EFAM ETM 97 bolj primeren za uporabo globalnega kriterija brez upoštevanja premera izvrtine za določitev FIN od standardnega postopka (tabela 1). Vrednosti FIN v globalnem nivoju so višje od vrednosti FIN-a v lokalnem nivoju, kar predstavlja varnost. Na sliki 5 je vidno da J integral raste z večanjem debeline. Na površini (0 mm) je najmanjši na sredini (1,5 mm) pa največji.

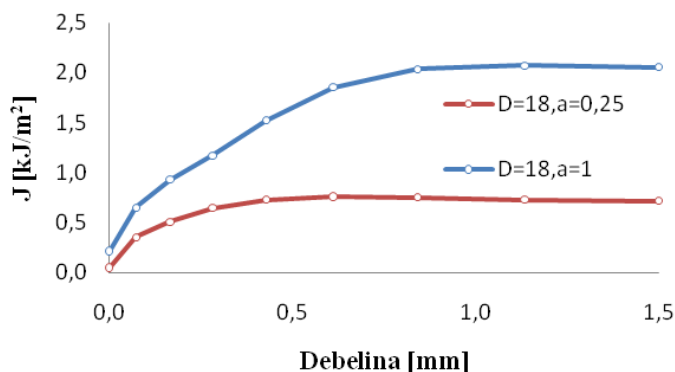
Tabela 1: Primerjava FIN v odvisnosti od razpoke a (splošni postopek)

a [mm]	0,25	0,5	1	1,25	1,5	2	2,5	3	4
K_I [MPa $\sqrt{\text{mm}}$] lokalno	319	451	638	713	781	902	1009	1105	1276
K_I [MPa $\sqrt{\text{mm}}$] - globalno	647	656	673	681	689	705	721	737	767

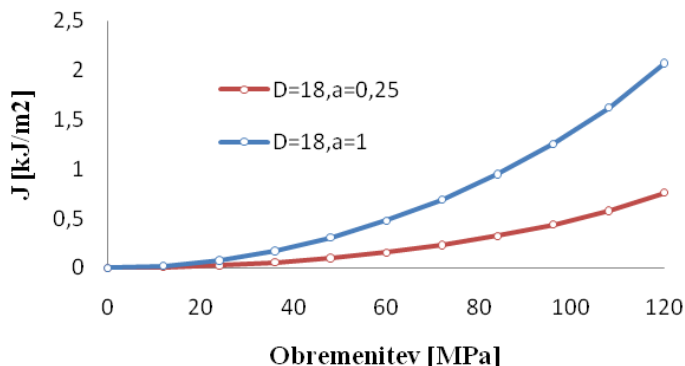
Tabela 2: Primerjava FIN v odvisnosti od razpoke a (po EFAM ETM 97)

a [mm]	0,25	0,5	1	1,25	1,5	2	2,5	3	4
K_I [MPa $\sqrt{\text{mm}}$] - lokalno	307	402	519	559	590	634	668	695	734
K_I [MPa $\sqrt{\text{mm}}$] - globalno	654	663	681	690	699	716	733	750	783

Vrednost J integrala se povečuje z velikostjo razpoke. Na površini se vrednosti FIN-a razlikujeta za 108 MPa $\sqrt{\text{mm}}$ za razpoko $a=0,25$ mm in $a=1$ mm. Vrednost FIN za razpoko $a=0,25$ mm je $K_{\max}=396$ MPa $\sqrt{\text{mm}}$, $K_{\min}=103$ MPa $\sqrt{\text{mm}}$, $K_{\text{povprečni}}=250$ MPa $\sqrt{\text{mm}}$, za razpoko $a=1$ mm je $K_{\max}=654$ MPa $\sqrt{\text{mm}}$, $K_{\min}=211$ MPa $\sqrt{\text{mm}}$, $K_{\text{povprečni}}=433$ MPa $\sqrt{\text{mm}}$. Izračunati FIN (tabela 1 in tabela 2) se razlikujejo od povprečnega FIN-a določenega z numeriko.



Slika 5: J integral v odvisnosti od debeline



Slika 6: J integral v odvisnosti od obremenitve

Razlika med FIN-i se zmanjšuje z rastjo razpoke. Iz rezultatov je vidno, da pri analizi celovitosti konstrukcij, FIN ne moremo opisati samo z eno vrednostjo, ker je odvisen od debeline. Za natančno določitev celovitosti konstrukcije potrebno je opraviti numerično analizo za FIN ob upoštevanju povprečne dolžine razpoke.

6 Zaključek

V prispevku je na analitični in numerični način ocenjeno, kdaj po velikosti lahko razpoko obravnavamo kot kratko in kdaj kot dolgo. Kot kriterij je upoštevana enakost vrednosti faktorja intenzitete napetosti-FIN. Na površini preizkušanca so vrednosti FIN-a po numeričnem izračunu in analitičnem postopku enake ne glede na dolžino razpoke. Vrednosti J integrala se bistveno ne razlikujejo med posameznimi postopki do obremenitve 10 MPa, med tem, ko po tej obremenitvi J integral (tudi FIN) progresivno narašča. Iz rezultatov je razvidno da vrednost FIN ni samo ena vrednost temveč je odvisna od ravninsko napetostnega stanja na površini in ravninsko deformacijskega stanja v notranjosti. Za določitev celovitosti konstrukcije je potrebna celotna krivulja J integrala, ki jo določimo s pomočjo numerične analize.

Literatura

- [1] H. Schwalbe, U. Zerbst, Y. J. Kim, W. Brocks, A. Cornec, J. Heerens, H. Amstutz, *EFAM ETM 97 – the ETM method for assessing the significance of crack-like defects in engineering structures, comprising the versions ETM 97/1 and ETM 97/2*. GKSS-Forschungszentrum Geesthacht GmbH, Geestacht, 1998
- [2] N. Troyani, C. Gomes, G. Sterlacci, *Theoretical Stress Concentration Factors for Short Rectangular Plates With Centered Circular Holes*. Transactions of the ASME, Vol. 124, March 2002
- [3] Griffith, A.A.: "The Phenomena of Rupture and Flow in Solids", Phil. Trans. A221, 1921
- [4] Računalniški program: *Abaqus CAE 6.10*, Dassault Systèmes
- [5] *Abaqus CAE User's Manual*, Version 6.10, Dassault Systèmes, 2010



Vpliv lege in uteži kontrolnih točk projektnega elementa pri optimizaciji topologije

M. Kegl¹ in B. Harl¹

Influence of the positions and weights of the design element control points in topology optimization

Povzetek. Prispevek obravnava optimizacijo topologije zveznih konstrukcij z uporabo nivojske funkcije in projektnega elementa. Pozornost prispevka je usmerjena k vplivu spremenljive lege in uteži kontrolnih točk projektnega elementa na potek optimizacije in na končno optimalno topologijo konstrukcije.

Abstract. This paper discusses topology optimization of continuous structures by using a level set function and a design element. Attention is focused mainly on the influence of variable control point positions and weights on the optimization history and on the final optimal topology of the structure.

1 Uvod

Razvoj metod za optimizacijo topologije konstrukcij je v dobrem desetletju, ki je sledilo objavi dela Bendsøe in Kikuchi [6], precej napredoval. Kljub temu v praktičnih aplikacijah mnoge od teh metod še vedno povzročajo nemalo težav (vzorci 'šahovnice', negladki robovi, majhni prazni prostori, numerična nestabilnost, neoptimalnost rezultata, ...), zato je njihova uporaba še precej daleč od avtomatizirane in prijazne uporabniku. Ena od možnih poti za spremembo na bolje predstavlja tip metod, ki so se začele razvijati pred nekaj leti. Osnovo sta postavila Sethian in Wiegmann [1] z vpeljavo nivojske funkcije v opis spremenljivih mej konstrukcije. Idejo uporabe nivojske funkcije v optimizaciji so nato s podporo metod matematičnega programiranja obogatili Wang in ostali [7]. To je bil začetek razvoja družine zelo obetavnih metod za optimizacijo oblike in topologije hkrati.

V prispevku je predstavljena lastna implementacija optimizacijske metode, ki temelji na nivojski funkciji in uporabi projektnega elementa. Osnove te metode smo že predstavili v preteklih prispevkih, Kegl in Harl [3, 4]. Namen tega prispevka pa je na kratko predstaviti vpliv pozicije in uteži kontrolnih točk projektnega elementa na potek optimizacije in razlike v dobljeni obliki konstrukcije. Mnogo bolj podroben opis celotne metode, vključno z novostmi predstavljenimi v tem prispevku, bo predvidoma na voljo v Kegl in Harl [5].

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

Prispevek v drugem in tretjem poglavju na kratko osvetli teoretično ozadje, potrebno za razumevanje numeričnih primerov. Slednji so predstavljeni v četrtem poglavju. Prvi primer je narejen s fiksnimi legami in utežmi kontrolnih točk. Pri drugem primeru so spremenljive lege notranjih kontrolnih točk, pri tretjem primeru pa so spremenljive uteži.

2 Parametrizacija nivojske funkcije in vpeljava projektnih spremenljivk

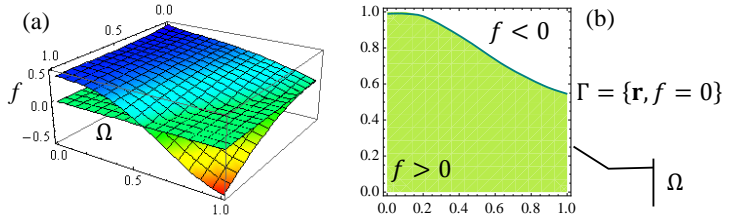
Obravnavamo konstrukcijo, ki se mora nahajati znotraj domene Ω . Na opazovani domeni je definirana nivojska funkcija f , slika 1a,

$$f = f(x, y), \quad x, y \in \Omega. \quad (1)$$

Rob materiala je definiran implicitno kot izolinija Γ nivojske funkcije,

$$\Gamma = \{(x, y), \quad f = 0\}. \quad (2)$$

Materialni del domene je tisti s $f > 0$, praznina pa je tam, kjer je $f < 0$, slika 1b.



Slika 1: Primer nivojske funkcije (a) in razdelitev domene na materialni in prazni del (b).

Za parametrizacijo domene Ω in nivojske funkcije f uporabimo (isti) projektni element Kegl in Harl [3]. Vsaki kontrolni točki (KT) projektnega elementa priredimo tri količine: lego \mathbf{q}_{ij} , vrednost f_{ij} in utež w_{ij} , slika 2. Izkaže se, da imajo vse tri količine vpliv na topologijo (in s tem tudi na odziv) konstrukcije. To pomeni, da je smiselno te količine definirati v odvisnosti od projektnih spremenljivk, zbranih v vektorju \mathbf{b} , ki jih optimizacijski algoritem lahko spreminja pri iskanju najboljše topologije. S tem postaneta od projektnih spremenljivk odvisni tako domena konstrukcije, kot tudi sama nivojska funkcija; ali krajše, $\Omega = \Omega(\mathbf{b})$ in $f = f(\mathbf{b}; x, y)$.

Zaradi enostavnosti privzemimo, da uporabimo samo en projektni element z $M_1 \times M_2$ kontrolnimi točkami. Njegove bazne polinome označimo z B_i . Krajevni vektor \mathbf{r}_Ω domene Ω in nivojska funkcija f_Ω na tej domeni naj bosta definirana z

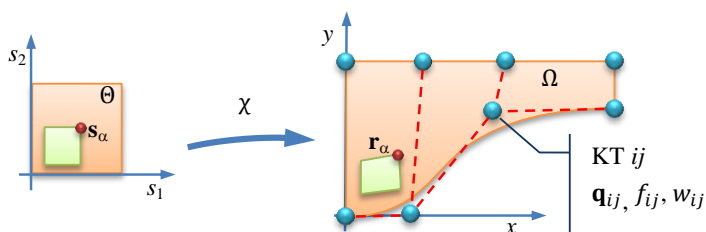
$$\mathbf{r}_\Omega = \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{M_2} B_i(s_1) B_j(s_2) \mathbf{q}_{ij}, \quad f_\Omega = \frac{\sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{M_2} B_i(s_1) B_j(s_2) w_{ij} f_{ij}}{\sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{M_2} B_i(s_1) B_j(s_2) w_{ij}}, \quad (3)$$

kjer je $\mathbf{s} = [s_1 \quad s_2]^T \in \Theta$, $\Theta = [0,1]^2$ pa je domena projektnega elementa, slika 2. Prva od obeh enačb v bistvu definira preslikavo $\chi : \Theta \rightarrow \Omega$.

3 Implementacija parametrizacije za metodo končnih elementov

Mrežo končnih elementov moramo pri naši postavitvi definirati v domeni Θ . Naj položaj posameznega vozlišča končnega elementa (KE) definira vektor $\mathbf{s}_\alpha \in \Theta$, slika 2. Položaj tega vozlišča v domeni Ω konstrukcije lahko torej z uporabo preslikave χ zapišemo kot

$$\mathbf{r}_\alpha = \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{M_2} B_i(s_{\alpha 1}) B_j(s_{\alpha 2}) \mathbf{q}_{ij}. \quad (4)$$



Slika 2: Preslikava iz domene projektnega elementa v domeno konstrukcije

Predpostavljamo seveda, da so položaji vseh vozlišč končnih elementov znani. Torej lahko krajevni vektor notranje točke KE izračunamo s pomočjo uporabe njegovih interpolacijskih polinomov N_α

$$\mathbf{r} = \sum_{\alpha=1}^K N_\alpha(\xi) \mathbf{r}_\alpha, \quad (5)$$

kjer K predstavlja število vozlišč posameznega KE in $\xi \in \Xi = [-1, +1]^2$.

Podobno naredimo z nivojsko funkcijo. Njena vrednost v vozlišču mreže končnih elementov je torej

$$f_\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{M_2} B_i(s_{\alpha 1}) B_j(s_{\alpha 2}) w_{ij} f_{ij}}{\sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{M_2} B_i(s_{\alpha 1}) B_j(s_{\alpha 2}) w_{ij}}, \quad (6)$$

znotraj KE pa jo zapišemo kot

$$f = \sum_{\alpha=1}^K N_\alpha(\xi) f_\alpha. \quad (7)$$

Na tak način dobimo torej \mathbf{r} in f za notranjo točko poljubnega KE izražena v odvisnosti od lege \mathbf{q}_{ij} , vrednosti f_{ij} in uteži w_{ij} . To pa je načelno vse, kar potrebujemo za izpeljavo kode KE, ki omogoča analizo odziva in občutljivosti konstrukcije. V našem primeru smo to implementirali na dveh nelinearnih ravninski elementih (4 in 8 vozliščni, izoparametrični). Izdelava kode je bila narejena s sistemom AceGen [2].

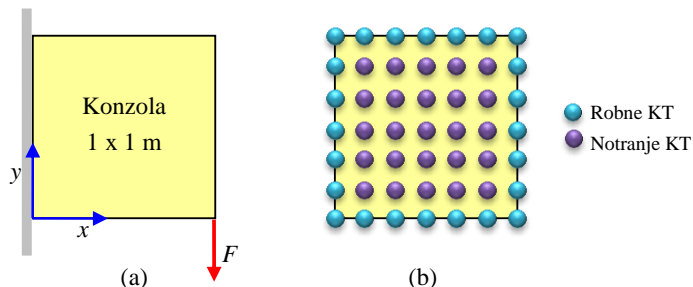
4 Numerični zgled

Za testni zgled smo izbrali konzolo dimenzij 1×1 m. Obremenjena je s točkovno silo velikosti $F = 100$ kN, slika 3a. Debelina konzole je 1 mm, material pa je linearno elastičen s podatki: $E = 210$ GPa, $\rho = 5000$ kgm $^{-3}$ in $\nu = 0.3$. Za parametrizacijo domene in nivojske funkcije smo uporabili smo en projektni element s 7×7 kontrolnimi točkami, slika 3b.

Projektni element je vseboval mrežo 8-vozliščni končnih elementov velikosti 30×30 . Za ilustracijo smo naredili tri primere:

- Primer A: spremenljivi f_{ij} , fiksni q_{ij} in w_{ij} ,
- Primer B: spremenljivi f_{ij} , spremenljivi q_{ij} notranjih kontrolnih točk, fiksni w_{ij} ,
- Primer C: spremenljivi f_{ij} , fiksni q_{ij} , spremenljivi w_{ij} .

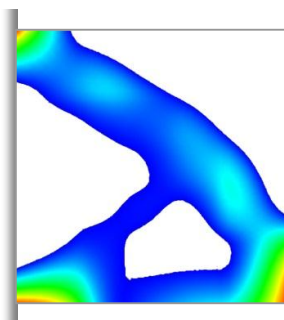
V vseh treh primerih smo minimizirali deformacijsko energijo konstrukcije pri omejenem volumnu materiala.



Slika 3: Konzola (a) in kontrolne točke projektnega elementa (b).

V Kegl in Harl [3], je opisan faktor λ , ki določa kako oster je prehod med polnim materialom in praznino. V vseh treh opisanih primerih smo začeli s faktorjem $\lambda = 0.25$ in ga v postopku optimizacije večali do vrednosti $\lambda = 32$.

V prvem primeru (A) smo vpeljali $7 \times 7 = 49$ projektnih spremenljivk, od katerih je neposredno odvisnih 49 vrednosti f_{ij} . Na sliki 4 je prikazana končna oblika po optimizaciji.

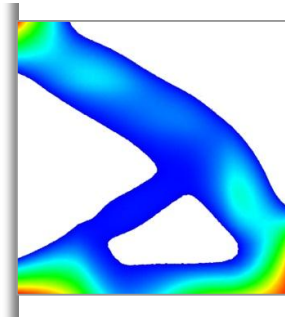


Slika 4: Optimalna oblika - primer A

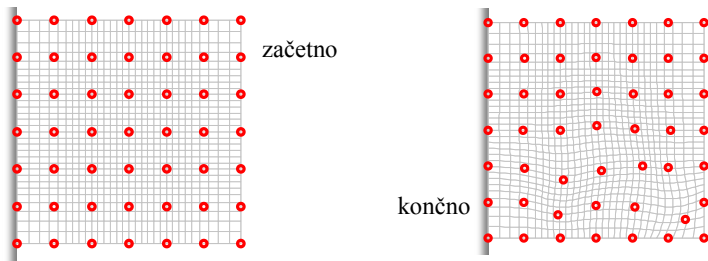
V drugem primeru (B) smo dovolili pomike notranjih KT, slika 3a. Tako smo vpeljali $7 \times 7 + 5 \times 5 \times 2 = 99$ projektnih spremenljivk. Na sliki 5 je podana končna oblika konstrukcije.

Na sliki 6 je prikazana začetna enakomerna porazdelitev kontrolnih točk in njihov končni položaj po postopku optimizacije. Pri tem je treba poudariti, da so bili pomiki notranjih KT precej omejeni, saj se mreža končnih elementov pri premikanju KT začne hitro

kvariti. To pa lahko zelo poveča napako v mehanskem odzivu. Vsekakor bi bilo dobro poiskati še nek mehanizem, ki bi v praktičnih primerih prečil preveliko kvarjenje mreže.

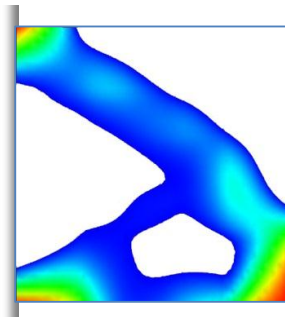


Slika 5: Optimalna oblika - primer B



Slika 6: Prerazporeditev notranjih kontrolnih točk – primer B

V tretjem primeru (C) smo razen f_{ij} spreminjali še uteži. Slednje so bile linearno odvisne od ustreznega števila dodatnih projektnih spremenljivk. Skupaj smo torej vpeljali $7 \times 7 + 7 \times 7 = 98$ projektnih spremenljivk. Končna optimalna oblika je prikazana na sliki 7.



Slika 7: Optimalna oblika - primer C

Numerična primerjava končnih oziroma optimalnih deformacijskih energij konstrukcij za vse tri opisane primere je podana v tabeli 1. Vidimo lahko, da smo najboljši rezultat dobili v primeru B, kar se sklada tudi z vtisom, ki ga dobimo pri ogledu oblik optimalnih konstrukcij. Nekoliko nenavadno pa praktično sovpadata deformacijski energiji primerov A in C. Samo iz deformacijske energije je videti, da spremenljive uteži niso prinesle kake omembe vredne izboljšave. Kljub temu bi lahko glede na obliko konstrukcije rekli, da je primer C dal vendarle (iz inženirskega stališča) nekoliko boljši rezultat.

Tabela 1: Deformacijske energije optimalnih konstrukcij

	Primer A	Primer B	Primer C
Št. proj. spr.	49	99	98
Def. energija [Nm]	492.5	482.7	492.4

Optimizacija je v vseh treh primerih potekala stabilno in brez zapletov. Deformacijska energija se je izkazala za dobro osnovo za optimizacijo topologije konstrukcij. V drugem in tretjem primeru smo približno podvojili projektne spremenljivke glede na prvega, kar je precej povečalo računski čas. Kaže, da se je v primeru B to obrestovalo, v primeru C pa je izkupiček vprašljiv. Spremenljiva lega kontrolnih točk bi torej znala biti zanimiva v nadaljnjem delu, za spremenljive uteži pa na osnovi samo tega primera le težko rečemo kaj bolj določenega.

Literatura

- [1] J. A. Sethian, A. Wiegmann, *Structural boundary design via level set and immersed interface methods*, Journal of Computational Physics, 163, 489-528, 2000.
- [2] J. Korelc, *Automatic generation of finite-element code by simultaneous optimization of expressions*. Theoretical Computer Science, 187 (1-2), 231-248, 1997.
- [3] M. Kegl, B. Harl, *Optimizacija topologije z uporabo nivojske funkcije in projektних elementov*, Kuhljevi dnevi 2009, 180-187, 2009.
- [4] M. Kegl, B. Harl, *Optimizacija topologije: o materialnem modelu in formulaciji optimizacijskega problema*, Kuhljevi dnevi 2010, 87-96, 2010.
- [5] M. Kegl, B. Harl, *Topology optimization based on design elements and level set function*, Strojniški vestnik 2011, (v recenziji).
- [6] M.P. Bendsøe, N. Kikuchi, *Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 71, 197-224, 1988.
- [7] M.Y. Wang, X. Wang, D. Guo, *A level set method for structural topology optimization*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 192, 227-246, 2003.



Prenosnost vibracij sistema dlan roka, pri vzburjanju v Z_h in Y_h smeri

L. Knez, J. Slavič in M. Boltežar¹

Vibration transmissibilities of the human hand arm system exposed to Z_h - and Y_h -axes vibration

Povzetek. Kot protiukrep vibracijam, ki povzročajo vibracijske bolezni rok, med drugim uporabljamo antivibracijske (AV) rokavice. Te zmanjšujejo vibracije v roko, njihovo učinkovitost delovanja pa preverimo s pomočjo funkcij prenosnosti vibracij. Prenosne funkcije ter dinamične lastnosti roke se po standardih ISO 10819 in ISO 5349 merijo za vzburjanja, ki delujejo v Z_h smeri (vzporedno s podlaketjo). Z_h smer vzburjanja se obravnava kot najbolj pomembna, vendar obstajajo tudi ročna orodja, ki vzbuja roko v več smereh. V tem delu raziskujemo biodinamični odziv roke pri vzburjanju v Y_h (prečni) smeri, merimo pa ločeno na dlani ter pri prstih. V tem delu merimo dinamično maso (DM), funkcije prenosnosti vibracij gole roke ter roke v rokavici pa so bile izračunane z uporabo biodinamične teorije. V rezultatih je prikazana primerjava funkcij prenosnosti AV rokavic med Z_h in Y_h smermi.

Abstract. As a countermeasure to vibrations that cause vibration induced injuries of the hand anti-vibration (AV) gloves are used. These reduce vibrations to the hand and their effectiveness is measured by the vibration transmissibility functions; by ISO 10819 and ISO 5349 standards these functions as well as dynamic properties of the hand are measured for Z_h -axis excitation direction (direction of the forearm). Z_h -axis is considered as the most important excitation direction; however, some tools excite the hand in multiple directions and this study researches the biodynamic response measurement of the Y_h direction; concurrently for the palm and the fingers. Apparent mass (AM) was measured and transmissibility functions of the hand and the gloved hand are computed using the biodynamic theory. A comparison between the transmissibilities of AV gloves in Z_h - and Y_h -axes is shown in the results.

1 Uvod

V splošnem obstajata dve metodi za preverjanja delovanja antivibracijskih (AV) rokavic. Prva je standardna metoda [12], druga, vedno bolj razširjena pa je metoda biodinamičnega odziva

¹ vsi Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

[14, 6, 9, 3]. Dong in raziskovalci v [7] primerjajo obe metodi in ugotovijo, da biodinamična metoda predstavlja boljšo alternativo standardni. V tem delu se osredotočimo na biodinamično teorijo, ki jo okarakteriziramo s pomočjo biodinamičnih parametrov (dinamična masa, mehanska impedanca in dinamična togost) in jih dobimo tako, da istočasno merimo gibanje in dinamične sile na stiku roka-ročaj; ročaj vzbujamo s primernim profilom. Pred kratkim so biodinamično metodo izboljšali, tako da meri biodinamične odzive ločeno na dlani in pri prstih [5, 8], to pa odpira nove možnosti za razumevanje sistema dlan-rokavica.

Poleg merilnih metod je pomemben tudi frekvenčni razpon meritev. Večina ročnih orodij ima dominantne lastne frekvence pod 250 Hz [9] in na njih se raziskovalci AV rokavic ponavadi osredotočijo. Standard ISO 10819 ocenjuje, da se najbolj problematične frekvence nahajajo pod 150 Hz, to potrjuje tudi standard ISO 9349 [13], kjer utežna funkcija poudarja frekvence med 0 in 150 Hz. Uteženje je osredotočeno okoli 10 Hz, kjer ima vrednost 1 in potem postopoma pada in pri 150 Hz doseže vrednost 0,1. To kaže na močen vpliv nizkih frekvenc na pojavljanje vibracijskih bolezni.

Obstaja veliko virov vibracij, ki vzbujajo roke v različnih smereh (ročna orodja, stroji, avtomobilski volan). Smeri vzbujanja roke so definirane glede na standard ISO 5349, označimo pa jih kot X_h , Y_h in Z_h . Z_h smer je vzporedna s podlaketjo in je dominantna smer vzbujanja za veliko orodij (pnevmatska kladiva, klešče za kovičenje, udarna kladiva, ... [10, 15]), obstajajo pa tudi določena orodja, ki močno vzbujajo v več smereh (motorna žaga, ročna brusilka, ... [15]). Pri teh ročnih orodjih morajo AV rokavice dušiti vibracije v vseh smereh. Raziskovalci, ki merijo v večih smereh vzbujanja, se osredotočajo predvsem na maksimalno dovoljeno dnevno mejo prejetih vibracij [4, 11]; to delo pa se poglobi v biodinamičen odziv in prenosnosti vibracij.

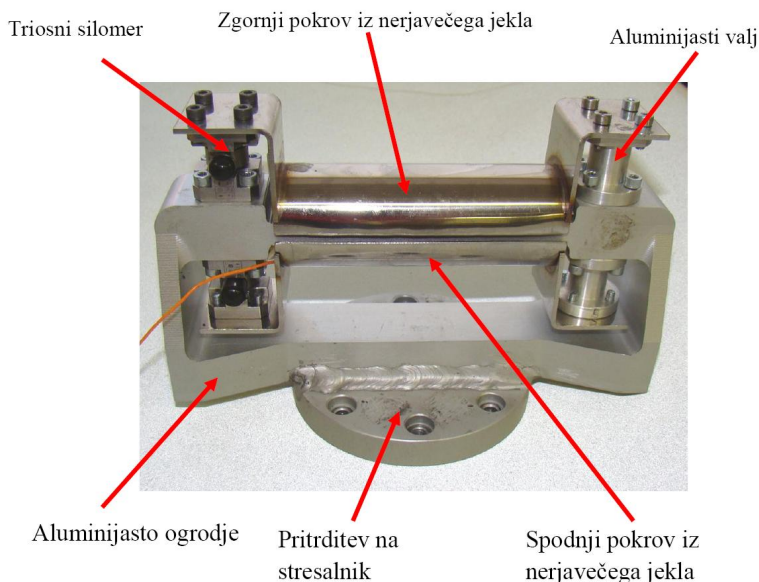
Glavni cilji te raziskave so: (1) meriti biodinamičen odziv sistema gola roka ter sistema roka v AV rokavici v frekvenčnem področju od 5 do 150 Hz, (2) izračunati vibracijske prenosne funkcije za oba sistema v Z_h in Y_h smeri, in (3) primerjati rezultate.

2 Merilna naprava

Na podlagi prejšnjih raziskav [5, 14] je bil razvit ročaj, ki lahko meri dinamične sile in pospeške tako v Z_h kakor tudi Y_h smereh. Ročaj premera 40 mm in dolžine 110 mm je prikazan na Sliki 1 in je sestavljen iz dveh troosnih piezoelektričnih silomerov tipa Kistler 9317B ter dveh aluminijastih valjev, ki imata vlogo lažnih zaznaval. Silomere se napaja z nabojnim ojačevalnikom Kistler 5073 in lahko merijo dinamične in kvazi statične sile. Kvazi statične silomere potrebujemo za merjenje stiskalne in potisne sile. Premik ničlišča piezoelektričnih zaznaval je 0,5 N v 2 minutah. Lažna zaznavala in silomeri povezujejo aluminijasto ogrodje z dvema pokrovoma iz nerjavečega jekla. Pospeškometer tipa B&K 4517-002 je pritrjen na sredino vsakega od obeh pokrovov. Zgornji del ročaja je namenjen meritvam na dlani, spodnji pa meri prste; tako merimo biodinamične sile in pospeške ločeno za prste in dlan na stiku roka-ročaj.

2.1 Frekvenčni odziv ročaja

Merilni ročaj je prožen sistem in ima svojo lastno dinamiko. Za pravilno določitev biodinamičnega odziva je zelo pomembno, da lastne frekvence ročaja ne motijo meritev. Zato je bilo potrebno preveriti frekvenčno prenosno funkcijo (FPF) v območju med 5 in 700 Hz. Referenčni pospeškometer



Slika 1 : Merilni ročaj, ki sestoji iz aluminijastega ogrodja, pokrovov iz nerjavečega jekla, aluminijastih valjev, triosnih silomerov in pospeškometerov.

je bil pritrjen na mizo stresalnika, odziv pa je bil merjen na zgornjem delu ročaja. Frekvenčna ločljivost meritev je znašala 2,5 Hz. FPF ročaja v Z_h smeri (prikazana na Sliki 2(a)) ima prvo lastno frekvenco pri 415 Hz, drugo pri 572 in tretjo pri 650 Hz. Ko ročaj primemo z roko, se položaj vrhov ne spremeni, se pa amplitude močno zmanjšajo. FPF za Y_h smer, ki jo vidimo na Sliki 2(b) pa ima prvo lastno frekvenco pri 455 Hz, drugo pri 600 Hz in tretjo pri 657 Hz. Na podlagi FPF lahko sklepamo, da lastna dinamika merilnega ročaja v območju med 5 in 150 Hz ne moti meritev.

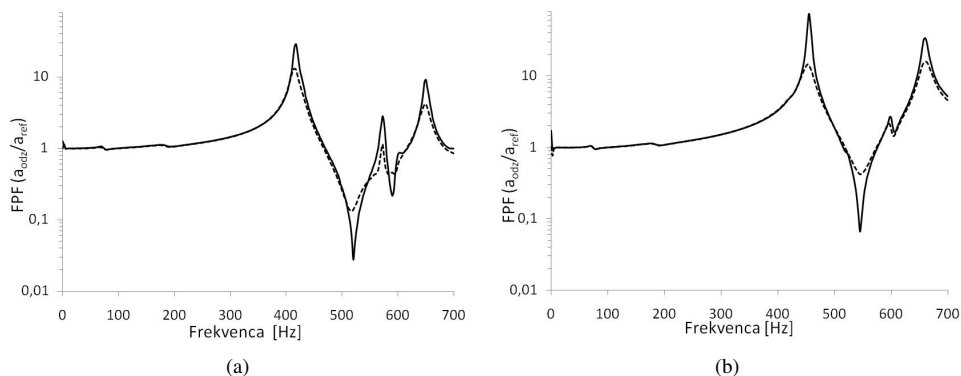
2.2 Vzbujanje v Z_h smeri

Za meritve v Z_h smeri je bil ročaj pritrjen na elektrodinamični stresalnik LDS V555, ki je bil primerno zasukan v Z_h smer. Merilna shema je prikazana na Sliki 3(a).

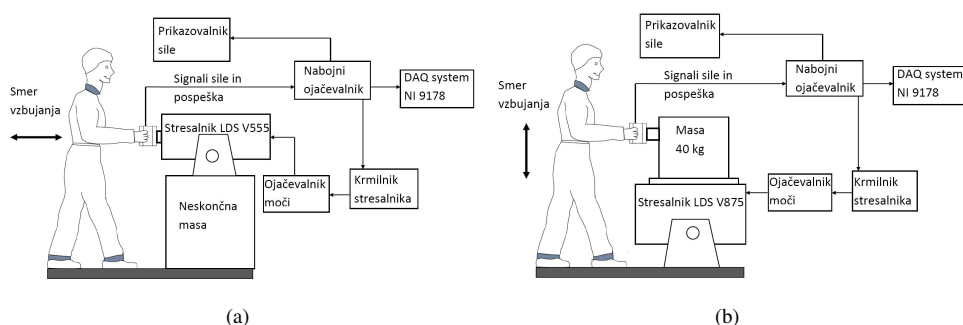
Da se potrdi pravilno delovanja naprave, je bila pomerjena DM pokrova pri širokospektralnem vzbujanju v frekvenčnem območju med 5 in 600 Hz. Izmerjena DM znaša 250 g z odstopanjem amplitude do 10 g, prava masa ročaja pa je 260 g. Ročaj torej meri pravilno.

2.3 Vzbujanje v Y_h smeri

Za meritve v Y_h smeri je bilo potrebno spremeniti položaj ročaja. To se je doseglo tako, da se je ročaj pritrdili na aluminijasto kocko mase 40 kg, ki je privijana na glavo stresalnika. Merilna



Slika 2 : Frekvenčna prenosna funkcija ročaja za: a) Z_h smer vzbujanja; b) Y_h smer vzbujanja; (— brez roke na ročaju; - - - z roko na ročaju).



Slika 3 : Merilna shema za: a) Z_h smer vzbujanja; b) Y_h smer vzbujanja.

shema za Y_h smer s stresalnikom LDS V875 je prikazana na Sliki 3(b). Podobno kot za Z_h smer je bila tudi tu pomerjena dinamična masa pokrova, ki znaša 275 g z odstopanjem do 10 g.

3 Postopek merjenja

Povprečenje je pomemben del biodinamičnih meritev, saj je v dinamskem smislu vsaka oseba drugačna. Raziskovalci v [6] so ugotovili, da je povečevanje števila preizkuševalcev dober način, da zmanjšamo pogreške pri meritvah. Posledično je v tem delu pomerjenih 6 preizkuševalcev, katerim so bila dana vsa potrebna navodila pred pričetkom merjenja. Postopek merjenja temelji na postopku, ki je opisan v standardu ISO 10819 ter [5], in je enak za meritve v obeh smereh.

Najprej je bil pomerjen biodinamični odziv samega ročaja. Zatem so preizkuševalci držali ročaj; enkrat z golo roko in enkrat z roko, oblečeno v AV rokavico ter prikazano na Sliki 4. Ročaj je bil širokospektralno vzbujan s srednjo kvadratično vrednostjo $5 \text{ (m/s}^2\text{)}^2/\text{Hz}$ v

frekvenčnem območju med 5 in 600 Hz. Vsak zajem traja 30 s z vsaj 100 povprečenji spektra. Preizkuševalci so med meritvijo stiskali ročaj s silo 30 N in tiščali s 50 N. Zaradi lažjega nadzora so se sile med meritvami prikazovale na zaslonu. Posebej se je tudi pazilo, da so preizkuševalci med meritvami vzdrževali primerno držo. To je pomembno zato, ker so raziskovalci [2, 1] odkrili velike razlike med rezultati pri različnih držah. Primerno držo lahko vidimo skicirano na Sliki 3.



Slika 4 : Antivibracijske rokavice, ki so bile uporabljene pri meritvah.

Veličine, ki jih merimo, so dinamične mase (DM) in jih izračunamo po postopku, predstavljenem v [5], v osnovi pa gre za deljenje dinamične sile z dinamičnim pospeškom; rezultati DM tu niso predstavljeni. Iz DM nato izračunamo funkcije prenosnosti vibracij T in sicer po sledeči enačbi:

$$T = \frac{DM_{Rokavica}(j\omega)}{DM_{GolaRoka}(j\omega)}, \quad (1)$$

kjer je $DM_{Rokavica}$ dinamična masa rokavice, $DM_{GolaRoka}$ dinamična masa gole roke, j je imaginarno število in ω je krožna frekvenca.

$DM_{Rokavica}$ dobimo tako, da pomerimo dinamično maso celotnega sistema $DM_{CelotnaRokavica}$, ki je sestavljena iz ročaja, rokavice ter roke in nato odštejemo od tega dinamično maso samega ročaja DM_{Rocaj} :

$$DM_{Rokavica}(j\omega) = DM_{CelotnaRokavica}(j\omega) - DM_{Rocaj}(j\omega). \quad (2)$$

$DM_{GolaRoka}$ pa dobimo po sledeči enačbi:

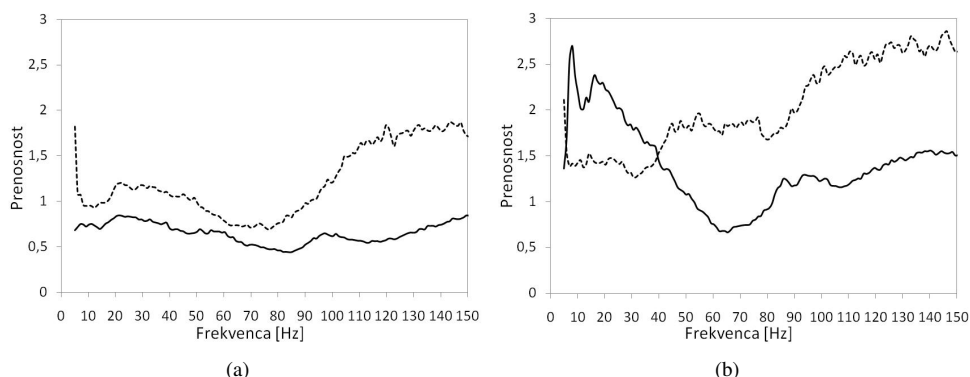
$$DM_{GolaRoka}(j\omega) = DM_{CelotnaGola}(j\omega) - DM_{Rocaj}(j\omega), \quad (3)$$

kjer je $DM_{CelotnaGola}$ dinamična masa celotnega sistema (ročaj+gola dlan).

4 Rezultati

Vibracijske prenosnosti popišejo učinkovitost AV rokavic, izračunajo pa se po enačbi (1). Če je vrednost prenosnosti pod 1, potem se vibracije dušijo, vrednosti nad 1 pa pomenijo ojačanje. Prenosnosti, ki so predstavljene tukaj, so izračunane za vsakega preizkuševalca posebej in nato povprečene skozi celotno populacijo. Predstavljena je torej srednja vrednost vibracijskih prenosnosti, in sicer v frekvenčnem področju med 5 in 150 Hz.

Slika 5(a) prikazuje vibracijsko prenosnost AV rokavic na dlani za Z_h in Y_h smeri vzbujanja. Prenosnost v Z_h smeri ima vrednost pod 1 skozi celotno frekvenčno področje in je boljša od Y_h prenosnosti. Najbolj učinkovita je med 65 in 85 Hz, kjer se prenosnost vibracij zmanjša za 50%. AV rokavice tudi zmanjšajo vibracije na dlani v Y_h smeri od 7 do 17 Hz ter od 50 do 90 Hz, nato pa se funkcija prenosnosti vibracij začne vzpenjati. V področju med 17 in 50 Hz so vibracije ojačane za 20%. Iz rezultatov lahko torej sklepamo, da AV rokavice nudijo dobro zaščito dlani v Z_h smeri vzbujanja in srednje dobro zaščito v Y_h smeri.



Slika 5 : Izmerjena prenosnost vibracij AV rokavic: a) na dlani; b) pri prstih (— Z_h smer vzbujanja; - - - Y_h smer vzbujanja).

Na Sliki 5(b) pa je prikazana vibracijska prenosnost AV rokavic pri prstih za obe smeri vzbujanja. Z_h in Y_h funkciji se sicer razlikujeta, vendar obe večinoma ojačata vibracije. Funkcija prenosnosti v Z_h smeri ima na začetku dva vrha, potem pa postopoma pade pod vrednost 1 od 55 do 85 Hz, kjer se vibracije dušijo, nato se vrednost ponovno prične dvigovati. Prenosnost v Y_h se začne s konstantno amplitudo približno 1,5 in se nato vseskozi vzpenja do konca frekvenčnega področja. Čeprav je rokavica prestala standardni preizkus, vseeno slabo varuje prste pred vibracijami pri nizkih frekvencah.

5 Zaključek

Standard 10819 predpisuje meritve AV rokavic samo v Z_h smeri (glede na koordinatni sistem predpisan v standardu ISO 5349). Večina raziskovalcev meri prenosnost vibracij na celotni roki in to samo v predvidoma dominantni Z_h smeri. Delajo se tudi meritve v vseh treh smereh, vendar se osredotočajo na maksimalno dovoljeno dnevno mejo pospeška in ne na dinamične

lastnosti rok ter AV rokavic. V tem delu se je meril biodinamični odziv roke in roke oblečene v AV rokavico, in sicer v dveh smereh vzbujanja. Glavni razlog za meritve v dveh smereh je v tem, da nekatera orodja vzbujajo v več smereh. Meritve prenosnosti so potekale ločeno na dlani ter pri prstih, in sicer v frekvenčnem področju med 5 in 150 Hz; narejena je bila primerjava rezultatov.

Iz rezultatov lahko naredimo sledeče povzetke. Dlan se je izkazala za občutljivo na nizke frekvence, saj lahko vidimo največ sprememb v območju med 5 in 50 Hz. AV rokavice, ki smo jih uporabili pri meritvah, dobro zaščitijo dlan v Z_h smeri, v Y_h smeri pa nudijo le delno zaščito. Rokavice pri prstih v Z_h smeri ne nudijo dobre zaščite, v Y_h smeri pa se vibracije samo ojačajo in AV rokavice ne nudijo ustrezne zaščite. Rezultati torej nedvoumno pokažejo, da imajo AV rokavice različne karakteristike v različnih smereh. To potrjuje potrebo po nadaljnjih raziskavah v več smereh vzbujanja, prav tako morajo razvijalci AV rokavic temu pojavu posvetiti več pozornosti.

Literatura

- [1] S.A. Adewusi, S. Rakheja, P. Marcotte, J. Boutin, *Vibration transmissibility characteristics of the human hand-arm system under different postures, hand forces and excitation levels*, Journal of Sound and Vibration 329, 2953–2971, 2010.
- [2] Y. Aldien, P. Marcotte, S. Rakheja, P.-E. Boileau, *Influence of hand-arm posture on biodynamic response of the human hand-arm exposed to z_h -axis vibration*, International Journal of Industrial Ergonomics 36, 45–59, 2006.
- [3] E. Concettoni, M. Griffin, *The apparent mass and mechanical impedance of the hand and the transmission of vibration to the fingers, hand, and arm*, Journal of Sound and Vibration 325, 664–678, 2009.
- [4] K.N. Dewangan, V.K. Tewari, *Characteristics of hand-transmitted vibration of a hand tractor used in three operational modes*, International Journal of Industrial Ergonomics 39, 239–245, 2009.
- [5] R.G. Dong, D.E. Welcome, T.W. McDowell, J.Z. Wu, *Measurement of biodynamic response of human hand-arm system*, Journal of Sound and Vibration 294, 807–827, 2006.
- [6] R.G. Dong, D.E. Welcome, T.W. McDowell, J.Z. Wu, *Methods for deriving a representative biodynamic response of the hand-arm system to vibration*, Journal of Sound and Vibration 325, 1047–1061, 2009.
- [7] R.G. Dong, S. Rakheja, T.W. McDowell, D.E. Welcome, J.Z. Wu, C. Warren, J. Barkley, B. Washington, A.W. Schopper, *A method for assessing the effectiveness of anti-vibration gloves using biodynamic responses of the hand-arm system*, Journal of Sound and Vibration 282, 1101–1118, 2005.
- [8] R.G. Dong, T.W. McDowell, D.E. Welcome, C. Warren, J.Z. Wu, S. Rakheja, *Analysis of anti-vibration gloves mechanism and evaluation methods*, Journal of Sound and vibration 321, 435–453, 2009.
- [9] R.G. Dong, J.Z. Wu, D.E. Welcome, *Recent Advances in Biodynamics of Human Hand-Arm System*, Industrial Health 43, 449–471, 2005.
- [10] R.G. Dong, D.E. Welcome, T.W. McDowell, J.Z. Wu, A.W. Schopper, *Frequency weighting derived from power absorption of fingers-hand-arm system under z_h -axis vibration*, Journal of Biomechanics 39, 2311–2324, 2006.

- [11] V. Goglia, Z. Gospodaric, D. Filipovic, I. Djukic, *Influence on operator's health of hand-transmitted vibrations from handles of a single-axle tractor*, Ann Agric Environ Med 13, 33–38, 2006.
- [12] ISO-10819, *Mechanical Vibration and Shock– Hand-Arm Vibration–Method for the Measurement and Evaluation of the Vibration Transmissibility of Gloves at the Palm of the Hand*, International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, 1996.
- [13] ISO-5349-1:2001, *Mechanical vibration - Measurement and evaluation of human exposure to hand-transmitted vibration - Part 1: General requirements*, International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, 2001.
- [14] N. Shibata, N. Hosoya, S. Maeda, *Establishment of One-Axis Vibration Test System for Measurement of Biodynamic Response of Human Hand-arm System*, Industrial Health 46, 629–634, 2008.
- [15] J. Stelling, H. Dupuis, *Different acute effects of single-axis and multi-axis hand-arm vibration*, Occupational Environmental Health 68, 236–242, 1996.



Ločevanje magnetnih delcev iz suspenzij v viskozem toku z uporabo Lagrange-Eulerjevega modela in metode robnih elementov BEM

P. Kocutar¹, M. Hriberšek¹ in J. Ravnik¹

Magnetic particle separation in viscous flow based on Lagrange-Euler model and boundary element method BEM

Povzetek. V raziskavi se posvečamo napravi za ločevanje magnetnih delcev v toku tekočine pod vplivom magnetnega polja. Naprava sestoji iz ozkega kanala, na koncu katerega se zaradi posedanja in magnetne sile ločujejo delci magnetita in aluminija. Za simulacijo dvo-faznega razpršenega toka trdnina-tekočina je bil uporabljen Lagrange-Eulerjev model. Numerična simulacija temelji na metodi robnih elementov. Algoritem rešuje Navier-Stokesove enačbe za nestisljiv tok zapisane v hitrostno-vrtinčni formulaciji. Trajektorije delcev so bile izračunane z uporabo metode Runge-Kutte četrtega reda. Neenakomerno magnetno polje inducirajo dolge žice pravokotne na kanal. Na posamezni delec delujejo: težnost, vzgon, upor, sila navidezne mase, tlačni gradient, ter Kelvinova magnetna sila. Upoštevano je eno-stransko povezovanje tekočine na trdnino. Rezultati prijazujejo porazdelitev delcev na koncu in tekom kanala.

Abstract. Present study focuses on device for separation of magnetic particles in fluid flow under influence of magnetic field. Device consist of narrow channel, where due to gravity and magnetic force magnetite and aluminium particles are separating. The Euler-Lagrangian formulation for simulation of dilute two-phase flow was applied. Numerical simulation is based on boundary element method. The algorithm solves Navier-Stokes equation for incompressible fluid written in velocity-vorticity formulation. 4th order Runge-Kutta method was applied for particle trajectories computation. Nonuniform magnetic field is induced by long wires perpendicular to the channel. On singular particle acting: gravity, buoyancy, drag, added mass effect, pressure gradient and Kelvin magnetic force. The one-way coupling between fluid and particles is considered. Results shows particle distribution along and at the end of a channel.

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

1 Uvod

Procesi ločevanja mikro-delcev se pogosto uporabljajo v procesni tehniki, ter bioloških in kemičnih raziskavah. Tsutsui [6] je naredil primerjavo različnih metod ločevanja mikro-delcev in tekočine. Primerjane so bile naslednje metode ločevanja: ločevanje na osnovi mikrostruktur in laminarnega toka, ločevanje z optično silo v mikrofluidnih, z akustičnimi silami, ločevanje mešanih delcev z zveznim tokom, ločevanje delcev z magnetno silo, ter ločevanjem namagnetenih delcev v zveznem toku. Ganguly [3] je v svojem delu obravnaval simulacijas dvo-dimenzionalnega prisilnega konvektivnega prenosa toplote v kanalu s feromagnetno tekočino, katera je pod vplivom dvo-dimenzionalnega magnetnega polja, ustvarjenega z linijskim dipolom. Cilj dela je bil, oceniti prenos toplote glede na termo-magnetno konvekcijo, ter to povezati s magnetnim poljem. Pamme [2] se je v svojih eksperimentih posvečala napravi za ločevanje magnetnih delcev velikosti nekaj μm v toku tekočine z uporabo trajnega magnetna.

V našem delu se posvečamo ločevanju delcev velikostnega razreda $10\mu m$ različnih magnetnih občutljivosti, razpršenih v toku v ozkem kanalu. Cilj študije je simulirati tokovne razmere v ločevalni napravi in oceni učinkovitost ločevanja. Z magnetnim poljem, ki ga inducirajo žice pravokotno na kanal, ločujemo delce magnetita in aluminija. Na posamezni delec delujejo: težnost, vzgon, upor, sila navidezne mase, tlačni gradient, ter Kelvinova magnetna sila. Zaradi redke suspenzije trdnine v tekočini, smo upoštevali eno-stransko povezovanje med trdnino in tekočino, torej le tekočine vpliva na delce. Za simulacijo dvo-faznega razpršenega toka trdnina-tekočina smo uporabili Lagrange-Eulerjev model. Numerična simulacija temelji na metodi robnih elementov. Algoritem rešuje Navier-Stokesove enačbe za nestisljiv tok zapisane v hitrostno-vrtinčni formulaciji [4]. Trajektorije delcev so bile izračunane z uporabo metode Runge-Kutte četrtega reda. Neenakomerno magnetno polje inducirajo dolge žice pravokotne na kanal.

2 Vodilne enačbe

V simulaciji toka tekočine smo predpostavili nestisljivo Newtonsko tekočino s konstantnimi materialnimi lastnostmi, gostota $\rho = \rho_0$, ter dinamična viskoznost $\mu = \mu_0$. Zakon ohranitve lahko s temi aproksimacijami zapišemo kot

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0. \quad (1)$$

Z brezdimenzioniranjem hitrosti \vec{v} , tlaka p , položaja delca \vec{r} , vrtinčnosti $\vec{\omega}$ in časa t lahko zapišemo zakon ohranitve gibalnega količine v brezdimenzijski obliki kot

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{Eu}\vec{\nabla}p + \frac{1}{Re}\nabla^2\vec{v}, \quad (2)$$

pri čemer je Eu Eulerjevo število $Eu = \frac{\rho_0 v_0^2}{p_0}$ in Re Reynoldsovo število $Re = \frac{v_0 L}{\mu_0}$.

Tok tekočine opisujejo kinematične enačbe

$$\nabla^2 \vec{v} + \vec{\nabla} \times \vec{\omega} = 0, \quad (3)$$

katere opisujejo hitrostno in vrtnično polje za vsako krajevno in časovno točko. Kinetično področje toka tekočine temelji na hitrostno vrtnični formulaciji, katero v brezdimenzionalni obliki zapišemo kot:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{\omega}. \quad (4)$$

Za hitrostno-vrtnično formulacijo smo uporabili Navier-Stokesove enačbe, pri čemer je vrtničnost definirana kot rotor hitrosti $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$. Hitrostno polje je solenoidno, torej $\text{div} \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$.

Sistem enačb (2) in (3) rešujemo v nelinearni zanki s tremi koraki. Najprej z reševanjem kinematičnih enačb in uporabo eno-območne metode robnih elementov izračunamo robne vrednosti vrtničnosti na robu. Nato izračunamo območne vrednosti hitrosti z reševanjem kinematičnih enačb z uporabo pod-območne metode robnih elementov. Na koncu iz vrednosti kinematične enačbe z uporabo vrtnične transportne enačbe izračunamo območne vrednosti vrtničnosti s pod-območno metodo robnih elementov.

Za obravnavo dvo-faznega razpršenega toka trdnina-tekočina je bil uporabljen Lagrange-Eulerjev model. Za opis gibanja delcev je bil uporabljen Lagrangev model sledenja delcev, ki opisuje vsak posamezni delec, njegovo gibanje in vpliv zunanjih sil na njega [4]. V našem primeru na posamezni delec deluje težnost, vzgon, upor, sila navidezne mase, tlačni gradient, ter Kelvinova magnetna sila. Kelvinovo magnetno silo na posamezni delec lahko zapišemo kot:

$$\vec{F}_m = \vec{a}_m m_p = \frac{1}{2} \mu_0 (\chi_p - \chi_f) V_p \vec{\nabla} (\vec{H} \cdot \vec{H}), \quad (5)$$

kjer je μ_0 magnetna permabilnost, $(\chi_p - \chi_f)$ razlika magnetnih občutljivosti med delcem in tekočino, ter V_p prostornina delca. Zadnji člen enačbe 5 lahko prav tako zapišemo

$$\vec{\nabla} (\vec{H} \cdot \vec{H}) = 2(\vec{H} \cdot \vec{\nabla}) \vec{H}. \quad (6)$$

Iz enačbe 6 sledi, da je magnetna sila odvisna od jakosti magnetnega polja, ter od gradienta magnetnega polja. To pomeni, da lahko tudi v primeru šibkih nehomogenih polj dovolj velika jakost povzroči veliko silo na magnetno občutljive delce.

Enačbo za pospešek delca sta zapisala Maxey in Riley [1]. Z upoštevanjem karakteristične hitrosti tekočine u_0 in karakteristične dolžine kontrolnega volumna, v našem primeru kanala L , lahko z uporabo $\vec{u} = \vec{u}_f / u_0$ in $\vec{v} = \vec{v}_p / u_0$ enačbo za pospešek delca zapišemo v brezdimenzionalni obliki kot

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{A}{St} \{ \vec{v}_s + \vec{u} - \vec{v} \} + \frac{3}{2} R \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + R \{ (\vec{u} + \frac{1}{2} \vec{v}) \cdot \vec{\nabla} \} \vec{u} + A \vec{a}_m, \quad (7)$$

pri čemer je \vec{a}_m pospešek zaradi magnetne sile. Stokesovo število in usedalna hitrost, ki nastopata v enačbi (7), sta definirana kot [5]

$$St = \frac{\rho_p d_p^2 u_0}{\rho 18 \nu L}, \quad \vec{v}_s = \frac{d_p^2}{18 \nu u_0} \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1 \right) \vec{g}, \quad (8)$$

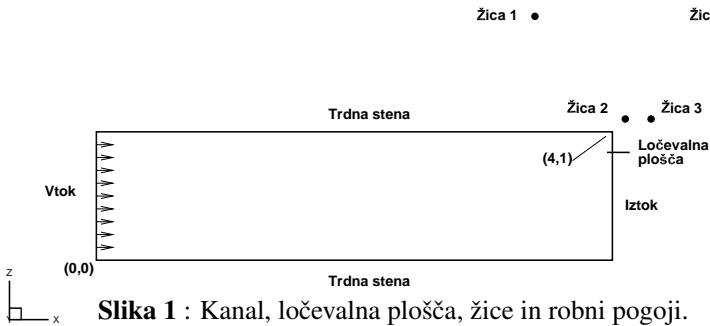
ter parametra R in A

$$R = \frac{\rho}{\rho_p + \frac{1}{2}\rho}, \quad A = \frac{\rho_p}{\rho_p + \frac{1}{2}\rho} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}R \left(1 + \frac{\rho}{2\rho_p}\right)}. \quad (9)$$

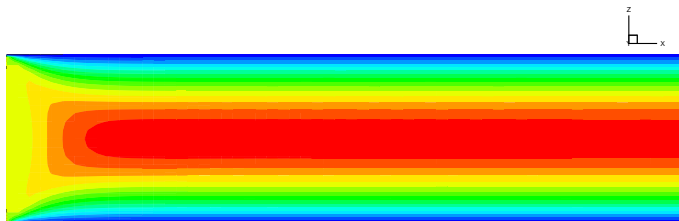
Zaradi redke suspenzije trdnine v tekočini, je upoštevano eno-stransko povezovanje med trdnino in tekočino. To v našem primeru pomeni, da samo tekočina vpliva na gibanje delcev.

3 Fizikalni model

Lagrange-Eulerjev model za dvo-fazen razpršen tok trdnina-tekočina je bil uporabljen za študijo naprave za ločevanje magnetno občutljivih delcev v toku tekočine pod vplivom magnetnega polja. Ločevalna naprava sestoji iz ozkega kanala, ločilne plošče, ter štirih žic, slika 1. Zvezna faza je voda z naslednjimi snovnimi lastnostmi: gostota $\rho_f = 997,83 \text{ kg/m}^3$, kinematična viskoznost $\nu = 1 \text{ mm}^2/\text{s}$, ter magnetna občutljivost $\chi_f = -9 \cdot 10^{-6}$. Povprečna hitrost tekočine je $v_f = 0,005 \text{ m/s}$ in karakteristična dimenzija kanala 1 mm , s tem je Reynoldsovo število $Re = \frac{v_f l}{\nu}$, $Re = 5$. Tok tekočine v kanalu je prikazan na sliki 2. Disperzni fazi sta magnetit Fe_3O_4 in aluminij Al . Delci magnetita imajo gostoto $\rho_{\text{Fe}_3\text{O}_4} = 5180 \text{ kg/m}^3$, magnetno občutljivost $\chi_{\text{Fe}_3\text{O}_4} = 0,41$, premer $d_{\text{Fe}_3\text{O}_4} = 14,43 \mu\text{m}$ ter Stokesovo število $St = 3 \cdot 10^{-4}$. Delci aluminija imajo gostoto $\rho_{\text{Al}} = 2700 \text{ kg/m}^3$, magnetno občutljivost $\chi_{\text{Al}} = 2,3 \cdot 10^{-4}$, premer $d_{\text{Al}} = 11,53 \mu\text{m}$, ter Stokesovo število $St = 1 \cdot 10^{-4}$.



Slika 1 : Kanal, ločevalna plošča, žice in robni pogoji.



Slika 2 : Tok tekočine v kanalu.

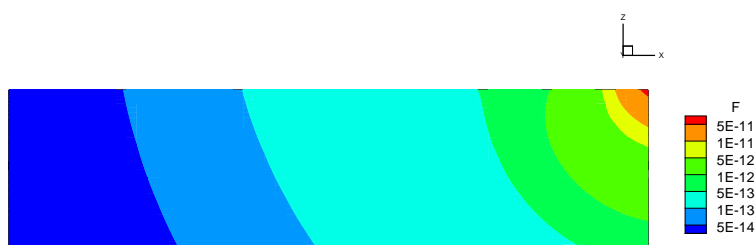
Magnetno polje inducirajo 4 dolge žice pravokotne na kanal. Njihove pozicije so prikazane na sliki 1. Magnetno polje je izračunano analitično za primer dolgega tankega vodnika, žice. Ker je magnetno polje statično, lahko s seštevanjem rešitev za vsak posamezni vodnik sestavimo skupno magnetno polje, ki učinkuje na magnetno občutljive delce. Tako lahko enačbo za magnetno polje, ki ga inducirajo žice prikazane na sliki 1, v kartezijskem koordinatnem sistemu zapišemo kot :

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi} \begin{pmatrix} -\frac{(z-z_1)}{((x-x_1)^2+(z-z_1)^2)} - \frac{(z-z_2)}{(x-x_2)^2+(z-z_2)^2} - \frac{(z-z_3)}{(x-x_3)^2+(z-z_3)^2} - \frac{(z-z_4)}{(x-x_4)^2+(z-z_4)^2} \\ 0 \\ \frac{(x-x_1)}{(x-x_1)^2+(z-z_1)^2} + \frac{(x-x_2)}{(x-x_2)^2+(z-z_2)^2} + \frac{(x-x_3)}{(x-x_3)^2+(z-z_3)^2} + \frac{(x-x_4)}{(x-x_4)^2+(z-z_4)^2} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Magnetna poljska jakost $H_0 = \frac{I}{2\pi L}$ je odvisna od toka skozi žico I glede na oddaljenost od vodnika L . V našem primeru znaša $H_0 = 225A/m$. Z znano magnetno poljsko jakostjo, izrazimo magnetno indukcijo, $B_0 = \mu_0 H_0 = \mu_0 \frac{I}{2\pi L}$. Pozicije žic so v kartezijskem koordinatnem sistemu podane kot: žica 1 $x_1 = 3,4$ $z_1 = 1,9$, žica 2 $x_2 = 4,1$ $z_2 = 1,1$, žica 3 $x_3 = 4,3$ $z_3 = 1,1$ in žica 4 $x_4 = 5,1$ $z_4 = 1,9$.

4 Rezultati

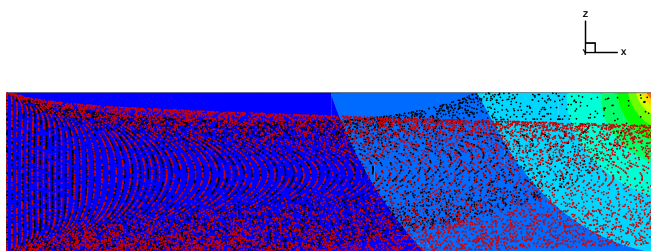
Jakost in smer magnetne sile, ki deluje na delce magnetita, opisujeta enačbi 5 in 6. Prikazani sta na sliki 3. Magnetna sila je zaradi oddaljenosti od žic na začetku kanala majhna. Zaradi tega v tem delu prevladuje gravitacijska sila in delci se gibljejo rahlo navzdol. Iz enačbe (10) je razvidno, da se z manjšanjem razdalje od žic, sila eksponentno večja, zato postane magnetna sila proti koncu kanala dominantna, zaradi česar se trajektorije delcev preusmerijo navzgor.



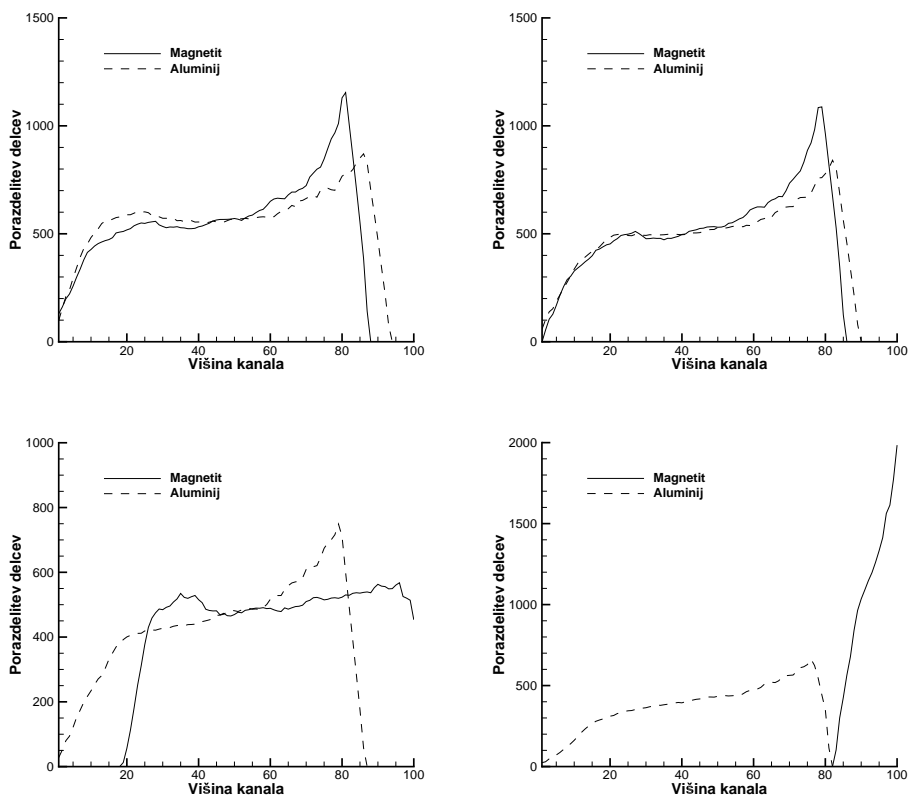
Slika 3 : Magnetna sila delujoča na delce magnetita: F [N].

Slika 4 prikazuje primerjavo med gibanjem delcev magnetita (črna barva), ter delci aluminija (rdeča barva).

Opazovali smo porazdelitev delcev obeh disperznih faz na večjih mestih vzdolž dolžine kanala. Porazdelitev delcev obeh faz na $1/4$ dolžine kanala je prikazana na sliki 5a, na $1/2$ dolžine kanala na sliki 5b, na $3/4$ dolžine kanala na sliki 5c, ter na koncu kanala na sliki 5d.



Slika 4 : Primerjava med gibanjem delcev magnetita (črna barva) in delci aluminija (rdeča barva) v toku tekočine pod vplivom neenakomernega magnetnega polja pri $Re = 5$.

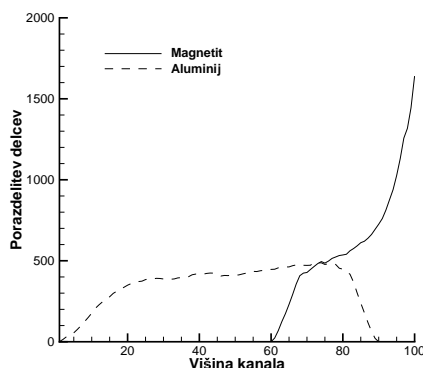


Slika 5 : Porazdelitev delcev na 1/4 (Slika 5a), 1/2 (Slika 5b), 3/4 (Slika 5c) dolžine kanala in na koncu kanala (Slika 5d) pri $Re = 5$. — — —: magnetit, —: aluminij.

Iz slike 5d, je razvidno, da se tok delcev vzdolž kanala popolnoma loči. Za namen ločevanja delcev, smo postavili ločevalno ploščo na 82% višine kanala. Na sliki 4 vidimo, da se nekaj aluminijevih delcev zaradi gravitacije posede na dno kanala in da se delci magnetita zaradi magnetne sile 'prilepijo' na vrh kanala. Slika 7 prikazuje delce aluminija in magnetita v toku s povprečno hitrostjo $v_f = 0,01 \text{ m/s}$. S tem se spremeni Reynoldsovo število $Re = 10$, Stokesovo število za delce magnetita $St = 6 \cdot 10^{-4}$, ter delce aluminija $St = 2 \cdot 10^{-4}$. Iz slike 6 je razvidno, da je učinkovitost ločevanja z večanjem hitrosti toka nižja. Učinkovitost ločevanja magnetita iz tekočine v odvisnosti od Reynoldsovega števila je prikazana v tabeli 1

Tabela 1 : Učinkovitost ločevanja magnetita v odvisnosti od Reynoldsovega števila.

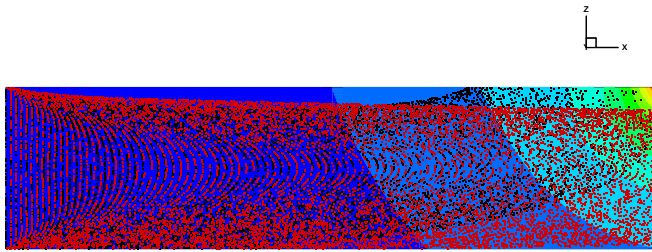
Re []	5	10
Učinkovitost ločevanja [%]	100	68



Slika 6 : Porazdelitev delcev na koncu kanala pri $Re = 10$. — — —: magnetit, —: aluminij.

5 Zaključek

Za sledenje magnetnih delcev v toku tekočine pod vplivom magnetnega polja je bila uporabljena metoda robnih elementov. Uporabljen numerični algoritem se je izkazal za primerne za simuliranje toka delcev pod vplivom magnetnega polja, ter preučevanje razmer v napravah za ločevanje delcev velikostnega razreda μm , v laminarnih tokovnih razmerah.



Slika 7 : Primerjava med gibanjem delcev magnetita (črna barva) in delci aluminija (rdeča barva) v toku tekočine pod vplivom neenakomernega magnetnega polja pri $Re = 10$.

Literatura

- [1] J. Riley M. Maxey. Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow. *Physics of Fluids*, 26:883–889, 1983.
- [2] Nicole Pamme, Jan C.T. Eijkel, and Andreas Manz. On-chip free-flow magnetophoresis: Separation and detection of mixtures of magnetic particles in continuous flow. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 307(2):237 – 244, 2006.
- [3] Swarnendu Sen Ranjan Ganguly and Ishwar K. Puri. Heat transfer augmentation using a magnetic fluid under the influence of a line dipole. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 271(1):63 – 73, 2004.
- [4] J. Ravnik, L. Skerget, M. Hribersek, and Z. Zunic. Numerical simulation of dilute particle laden flows by wavelet bem-fem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(6-8):789 – 805, 2008.
- [5] Martin Sommerfeld. *Modellierung und numerische Berechnung von partikelbeladenen turbulenten Stroemungen mit Hilfe des Euler/Lagrange-Verfahrens*. Shaker Verlag Aachen, 1996.
- [6] Hideaki Tsutsui and Chih-Ming Ho. Cell separation by non-inertial force fields in microfluidic systems. *Mechanics Research Communications*, 36(1):92 – 103, 2009. Recent Advances in Microfluidics.



Geometrijska optimizacija uklona SMA palice zaradi ovirane povračljivosti

J. Kunavar¹, F. Kosel¹, A. Pukšič¹, T. Videnič¹

Geometry Optimization in Buckling of a Shape Memory Alloy Column due to Constrained Recovery

Povzetek. Predstavljena je eksperimentalna in teoretična raziskava uklona zaradi ovirane povračljivosti za tlačno preddeformirano palico iz zlitine z oblikovnim spominom (SMA). Teoretično je obravnavan uklon idealno ravne, členkasto vpete SMA palice z nekonstantnim prerezom zaradi ovirane povračljivosti in izdelana geometrijska optimizacija omenjene palice. Uklonska sila in temperatura sta izračunani z uporabo eksperimentalno določenih termomehanskih lastnosti. Rezultati izračuna se dobro ujemajo z izmerjenimi vrednostmi uklonske sile in temperature.

Abstract. Buckling due to constrained recovery for a compressively- pretrained shape memory alloy (SMA) column is experimentally and theoretically investigated. Optimization of geometry in buckling of an ideally straight, simply- supported column with a non-constant cross section due to constrained recovery is theoretically investigated. By using the experimentally obtained thermo-mechanical properties, the critical buckling force and temperature of the optimized column are calculated. The calculated critical load and predicted buckling temperatures show good agreement with buckling experiments reported in this paper.

1 Uvod

Inteligentni materiali so deležni naraščajoče pozornosti, saj je njih uporaba zelo primerna v inovativnih konstrukcijah. Pomembno skupino teh materialov predstavljajo zlitine z oblikovnim spominom, ki jih bomo v nadaljevanju večinoma imenovali z SMA (okrajšava za Shape Memory Alloys). Pojav oblikovnega spomina je edinstvena lastnost nekaterih zlitin ki se potem, ko so bile deformirane pri nizki temperaturi, ob segrevanju na višjo temperaturo povrnejo v prvotno obliko. Tako imenovan 'spomin' je rezultat brezdifuzijske preobrazbe v trdnem stanju oziroma transformacije iz kristalografsko manj urejene, nizkotemperaturne faze (martenzit) v kristalografsko bolj urejeno, visokotemperaturno matično fazo (avstenit). Vrnitev v prvotno avstenitno obliko se prične, ko zlitina doseže temperaturo začetka

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

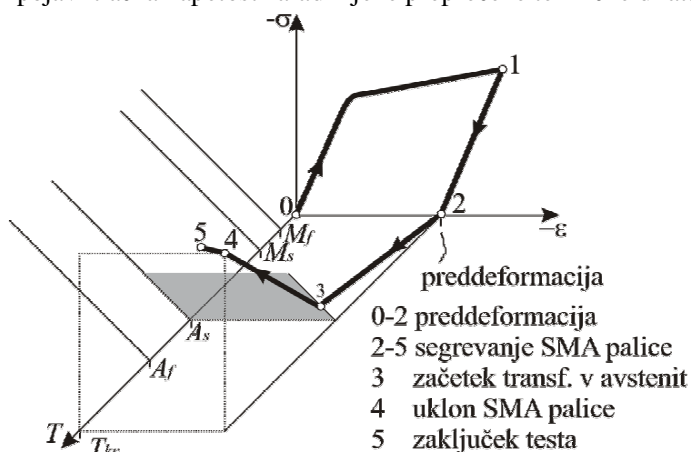
transformacije v avstenit označeno z A_s (avstenit start) in se zaključi, ko doseže temperaturo konca transformacije v avstenit A_f (avstenit finish). Če pa SMA ohlajamo iz avstenitne faze, se začne transformirati v martenzitno fazo pri temperaturi označeni z M_s (martenzit start) in konča pri temperaturi M_f (martenzit finish).

Na ta način lahko s segrevanjem iz martenzita v avstenit zlitina povrne zelo velike deformacije, reda 8 %, in ta proces se običajno imenuje obratna martenzitna transformacija oziroma neovirana povračljivost. Če je proces neovirane povračljivosti preprečen z zunanjo oviro preden je dosežena temperatura A_f , se v zlitini generirajo napetosti, ki lahko narastejo tudi do 800 MPa, ta proces pa se imenuje ovirana povračljivost [1, 5]. Zaradi te lastnosti so SMA materiali takorekoč idealni za uporabo kot spojni elementi in za uporabo v medicini [3, 4]. Pri teh aplikacijah je še posebej važno razumevanje generiranja napetosti zaradi ovirane povračljivosti, kot funkcije temperature. S problemom ovirane povračljivosti SMA zlitin se intenzivno ukvarjajo tudi v Sloveniji, in sicer na Fakulteti za strojništvo, v Laboratoriju za nelinearno mehaniko, kjer je bilo doslej teoretično in eksperimentalno rešenih več problemov ovirane povračljivosti enoosnih elementov ter krožnih obročev iz SMA [6, 10].

Uklon palic je stabilnostni problem, ki je v velikem obsegu že raziskan [9], medtem ko je uklon SMA palic le malo raziskano področje [7, 8]. V nam dosegljivi literaturi problem geometrijske optimizacije uklona SMA palic zaradi ovirane povračljivosti, doslej še ni bil obravnavan.

2 Definicija naloge

V vitki, idealno ravni nepomično členkasto vpeti SMA palici zaradi pojava ovirane povračljivosti ob segrevanju nad A_s pride do generacije večje tlačne napetosti zaradi česar palica lahko izgubi stabilnost in eventualno ukloni. Naš namen je izračunati optimalno geometrijo SMA palice okroglega prereza, take da bo njena nosilnost maksimalna pri enakem volumnu in dolžini palice kot ga ima neoptimirana palica. Za doseg procesa ovirane povračljivosti je potrebno preddeformirati vzorec, in sicer tlačno preddeformiramo palico ki je iz samega martenzita. Potem, ko je zagotovljena preddeformacija, je vzorec členkasto vpet med podpori, ki sta aksialno nepomični. Med segrevanjem do temperature A_s se v SMA palici pojavi tlačna napetost zaradi njene preprečene termične dilatacije.



Slika 1: Ovirana povračljivost SMA palice.

Kot je že omenjeno, segrevanje do temperatur višjih od A_s sproži proces ovirane povračljivosti, ki v SMA palici povzroči dodatno osno tlačno napetost, Slika 1. Vzorec ima tako geometrijo, da je za pričakovati, da bo uklonil v temperaturnem območju nad A_s .

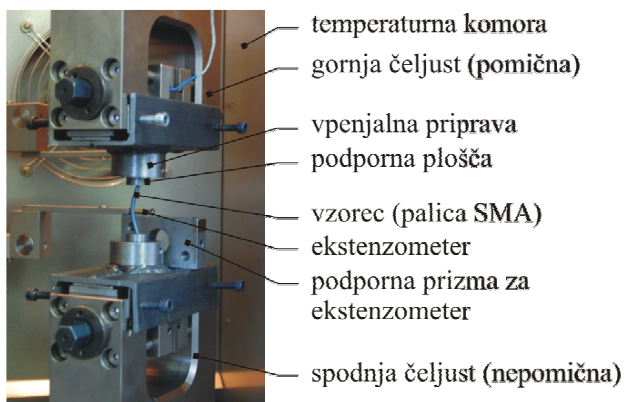
Če hočemo izračunati kritično uklonsko silo F_{kr} in temperaturo T_{kr} , moramo najprej znati izračunati notranjo osno **silo** v palici kot funkcijo temperature, poznane pa morajo biti tudi **mehanske lastnosti** materiala, ki so funkcija temperature in razpona palice. Notranjo osno silo zaradi pojava ovirane povračljivosti se določi z eksperimenti, možno pa jo je tudi računsko določiti z uporabo ustreznih fizikalnih modelov, ki rešujejo problem ovirane povračljivosti [1, 5, 6].

3 Potek meritve

Meritve so bile izdelane na trgalnem stroju Zwick Z050/TH3A, z največjo natezno/tlačno silo 50kN v območju točnosti $\pm 0.5N$. Meritve so bile izdelane v ventilirani temperaturni komori, katere izdelovalec je Zwick. Temperaturno območje komore je znašalo od $-70^{\circ}C$ do $250^{\circ}C$, z možnostjo zagotavljanja konstantne nastavljene temperature v območju natančnosti ± 0.1 K. Vzorci, uporabljeni v meritvah, so bile ravne palice okroglega prereza iz Ni 50 at. % -Ti zlitine, nemškega izdelovalca Memry®GmbH. Dobavljene ravne palice so bile okroglega prereza s premerom 3.12 mm in dolžine 200 mm. Transformacijske temperature smo izmerili po običajnem postopku [4], in so sledeče $M_f = 27^{\circ}C$, $M_s = 30,5^{\circ}C$, $A_s = 57^{\circ}C$ in $A_f = 67^{\circ}C$.

3.1 Eksperimentalna določitev uklonske sile in temperature

V prvem koraku mora v vzorcu nastati sam martenzit pri sobni temperaturi, s čimer se izbrišejo njegove predhodne deformacije. Korak sestoji iz segrevanja vzorca na električni grelni plošči pri $150^{\circ}C$ za dve minuti, počasnem ohlajanju na zraku in ohlajanju pri $-8^{\circ}C$ za pet minut.



Slika 2: Uklonjen vzorec, vpet v trgalnem stroju.

V drugem koraku je vzorcu, v katerem je sam martenzit, povzročena tlačna preddeformacija. Ker je sobna temperatura $T_0 = 25^{\circ}C$ (z odstopanjem $\pm 1^{\circ}C$), nižja od M_f , je preddeformacijo martenzita možno opraviti pri sobni temperaturi. Za preprečitev uklona vzorca med tlačnim obremenjevanjem, je vzorec vstavljen v posebno vpenjalno pripravo (dva jeklena bloka z izvrtino premera 3mm v smeri pomika čeljusti, tako da obstaja med luknjo in vzorcem

ohlapien ujem). Vpenjalna priprava je vidna na Sliki 2, vendarle njena funkcija iz te slike ni razvidna. Pri sobni temperaturi je tako vpeti vzorec tlačno obremenjevan pri hitrosti pomika čeljusti 0.5 mm/min, dokler njegova tlačna deformacija ne doseže 2.5%, nato pa je razbremenjen na ničelno napetost. Po razbremenitvi je v vzorcu prisotno 2% zaostale tlačne deformacije, ki jo bomo v nadaljevanju imenovali *preddeformacija*.

V tretjem koraku vzorec izvlečemo iz vpenjalne priprave, nanjo vstavimo podporni plošči in nato med njima namestimo vzorec. S programsko opremo TestXpert 2.0 predpišemo da mora biti razdalja med vpenjalnimi čeljustmi v času tega koraka nespremenjena. Nato začne temperatura zraka v komori rasti z 1 °C/min in sicer dokler vzorec ne ukloni, pri čemer uklon lahko opazimo s prostim očesom, Slika 2.

4 Enodimenzijski model ovirane povračljivosti za SMA palico nekonstantnega prereza

Obravnavali bomo problem uklona enoosnih konstrukcijskih elementov z okroglim prerezom. Za vitek element okroglega prereza $Q(x)$ in določene dolžine L_0 iščemo takšno funkcijo prereza $Q(x)$, pri kateri je kritična uklonska sila F , ki povzroči pojav uklona, maksimalna, torej $F=F_{max}$ ob pogoju, da je volumen optimiranega elementa enak volumnu referenčnega konstrukcijskega elementa konstantnega okroglega prereza, torej $V_{opt}=V_{konst}$. Obravnavamo primer, ko je preddeformacija v martenzitni fazi za optimiran in neoptimiran konstrukcijski element enaka. Obravnavamo SMA palico, ki je bila predhodno tlačno preddeformirana pri $T < M_f$, nato pa členkasto vpeta v nepomične čeljusti trgalnega stroja. Od tu naprej se začne postopek segrevanja med nepomičnimi čeljustmi. Segrevanje tega SMA palice moramo razdeliti na tri temperaturna območja:

- a.) Prvo območje segrevanja: $T_0 \leq T \leq T_c$
- b.) Drugo območje segrevanja: $T_c \leq T \leq T_{c,max}$
- c.) Tretje območje segrevanja: $T_{c,max} \leq T$

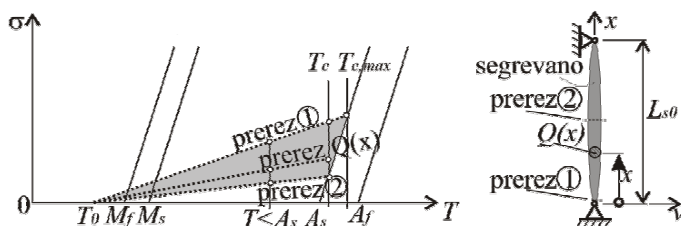
Uporabili bomo model snovno nelinearne mehanike [1], ki se pogosto uporablja pri reševanju problemov ovirane povračljivosti SMA [6, 10].

4.1 Izpeljava enačb za drugo območje segrevanja: $T_c \leq T \leq T_{c,max}$

Notranja osna sila v palici je tlačna, pojavi se zaradi preprečene termične dilatacije in ovirane povračljivosti, in je pri konstantni temperaturi po dolžini palice konstantna, torej $F = N = N(T)$, ter $N \neq N(x)$. Zaradi nekonstantnega prereza SMA palice $Q = Q(x)$ je tlačna

napetost $\sigma(x, T) = \frac{N(T)}{Q(x)}$, po dolžini je pri konstantni temperaturi obratno sorazmerna

funkciji prereza. Del palice, ki ima najmanjšo tlačno napetost, bo prvi izpolnil pogoj za začetek transformacije v avstenit, Slika 3. Ta del palice označimo z dolžino Δx . Preostali del palice, ki ima pri opazovani temperaturi napetost, višjo od napetosti začetka transformacije v avstenit, ostane v martenzitni fazi. Omenimo da v izpeljavi zaradi simetrije, Slika 3, upoštevamo polovično dolžino palice.



Slika 3: Diagram temperatura-tlačna napetost s prikazano mejo začetka obratne martenzitne transformacije.

Velja naslednja povezava med premikom posameznega območja palice: $u_1 + u_2 = L_s(T) - L_0$, kjer je u_1 premik območja kjer je transformacija v avstenit (M→A), u_2 pa premik območja kjer ni transformacije v avstenit (M→A).

$$u_1(T) = 2 \left[\varepsilon_{s0} \int_{\frac{L_0}{2} - \Delta x}^{\frac{L_0}{2}} \xi(x, T) dx + \alpha_s (T - T_0) \int_{\frac{L_0}{2} - \Delta x}^{\frac{L_0}{2}} dx - \int_{\frac{L_0}{2} - \Delta x}^{\frac{L_0}{2}} \frac{F dx}{Q(x) E(x, T)} \right] \quad (1)$$

$$u_2(T) = 2 \left[\varepsilon_{s0} \int_0^{\frac{L_0}{2} - \Delta x} dx + \alpha_s (T - T_0) \int_0^{\frac{L_0}{2} - \Delta x} dx - \int_0^{\frac{L_0}{2} - \Delta x} \frac{F dx}{Q(x) E_M} \right] \quad (2)$$

Volumski delež martenzita v zmesi označimo s ξ in ga definiramo kot $\xi = V_M / (V_A + V_M)$, kjer je V_M volumen martenzitne, V_A pa volumen avstenitne faze, ki sta prisotni v SMA palici. V gornjih dveh enačbah $\xi(x, T)$ izračunamo po enačbi ki jo uporablja model snovno nelinearne mehanike [1]:

$$\xi(x, T) = \frac{F(T)}{C(A_f - A_s) Q(x)} + \frac{A_f - T}{A_f - A_s} \quad (3)$$

Znano je, da je elastični modul avstenita E_A večji (reda dva do tri-krat) od elastičnega modula martenzita E_M , velikost razmerja je seveda odvisna od vrste SMA zlitine [4].

V Enačbi (1) $E(x, T)$ izračunamo po enačbi iz literature [2]:

$$E(x, T) = (E_m - E_a) \xi(x, T) + E_a \quad (4)$$

Upoštevati moramo še pogojno enačbo za začetek transformacije v avstenit [1]:

$$\frac{F(T)}{Q(\frac{L_0}{2} - \Delta x)} - C(T - A_s) = 0 \quad (5)$$

Tako dobimo enačbo za silo F :

$$F(T) = \frac{-\alpha_s (A_s - T_0) L_0}{\frac{\alpha_s L_0}{C Q(\frac{L_0}{2} - \Delta x)} + \frac{2 \varepsilon_{s0} B_1}{C(A_f - A_s) Q(\frac{L_0}{2} - \Delta x)} - \frac{2 B_2}{E_M} - 2 C(A_f - A_s) B_3} \quad (6)$$

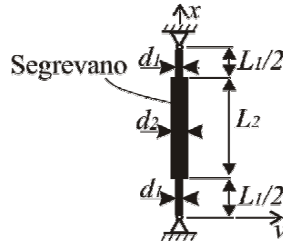
kjer so: $B_1 = \int_{\frac{L_0}{2}-\Delta x}^{\frac{L_0}{2}} \frac{dx}{Q(x)}$; $B_2 = \int_0^{\frac{L_0}{2}-\Delta x} \frac{dx}{Q(x)}$ in

$$B_3 = \int_{\frac{L_0}{2}}^{\frac{L_0}{2}-\Delta x} \frac{dx}{C[E_a(A_f - A_s) - (E_A - E_M)(A_f - T)]Q(x) - (E_A - E_M)F} .$$

Na podoben način izpeljemo enačbo za silo v preostalih dveh temperaturnih območjih.

5 Izračun uklonske sile in temperature za optimirano SMA palico

V prejšnjem poglavju so bile določene enačbe za izračun tlačne sile kot funkcije temperature med ovirano povračljivostjo, in sicer za poljubno funkcijo prereza palice $Q(x)$ ter za poljubno obliko prereza, pri čemer smo za meritve izbrali obliko palice z odsekoma konstantnim prerezom s tremi območji, in sicer v območju L_1 je premer d_1 , v območju L_2 ima premer d_2 , Slika 4.



Slika 4: Členkasto vpeta optimirana SMA palica okroglega prereza.

Uklon vzorca pri temperaturi $T_{kr} > A_s$ obravnavamo kot elastični uklon [7]. Skladno s tem lahko za določitev kritične uklonske sile uporabimo način, ki je za palice z odsekoma konstantnim prerezom s tremi polji prikazan v literaturi [9]:

$$\sqrt{\frac{E_{d2}I_{d2}}{E_{d1}I_{d1}}} = \tan\left(\frac{L_1\omega_2}{2}\sqrt{\frac{E_{d2}I_{d2}}{E_{d1}I_{d1}}}\right)\tan\omega_2\frac{L_2}{2} \quad (7)$$

kjer je $\omega_2^2 = \frac{F_{kr}}{E_{d2}I_{d2}}$, kjer sta E_{d1} in I_{d1} elastični modul in minimalni vztrajnostni

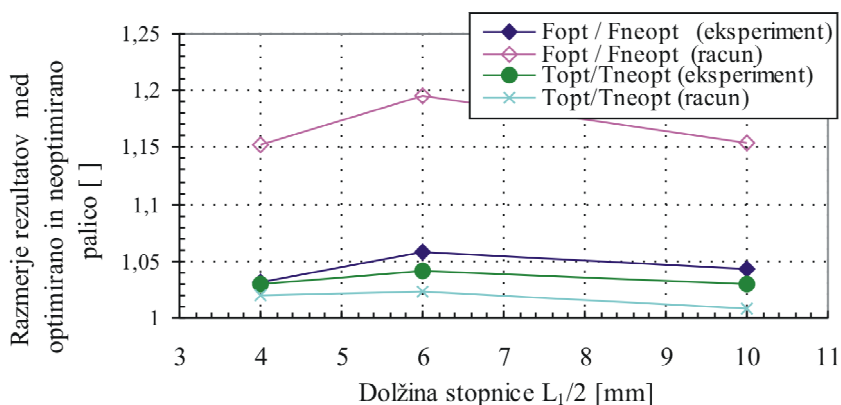
moment prereza v območju s premerom d_1 , E_{d2} in I_{d2} pa sta elastični modul in minimalni vztrajnostni moment prereza v območju L_2 . Postopek za izračun uklonske sile in temperature je sledeč: rešujemo sistem treh nelinearnih enačb s tremi neznankami (uklonska sila F_{kr} , uklonska temperatura T_{kr} in modul elastičnosti E med uklonom). Prva enačba v tem sistemu je Enačba (6), njena oblika je odvisna od temperaturnega območja v katerem se nahaja palica pri obravnavani temperaturi. Druga v sistemu je Enačba (4), tretja enačba v sistemu pa je Enačba (7). V tem sistemu enačb upoštevamo da je $F(T_{kr})=F_{kr}(T_{kr})$, oziroma izračunana tlačna sila v palici pri uklonski temperaturi T_{kr} je enaka izračunani uklonski sili F_{kr} pri uklonski temperaturi T_{kr} .

6 Eksperimentalna določitev uklonske sile in temperature

Geometrija optimirane SMA palice je predstavljena na *Sliki 4*, medtem ko ima neoptimirana SMA palica enako dolžino in po dolžini konstanten premer $D_{konst.}$. Torej, namesto da bi imeli vsi vzorci enak volumen in bi jih primerjali med sabo glede na kritično uklonsko silo oziroma kritično uklonsko temperaturo, imata v našem primeru le po dva enaka vzorca enak volumen. Čeprav ne moremo primerjati absolutne velikosti nosilnosti vseh vzorcev, lahko najprej opazujemo vpliv dolžine stopnice $L_1/2$ na T_{kr} in F_{kr} znotraj opazovanega para ter določimo optimalno dolžino stopnice $L_1/2$ za celotno skupino vzorcev.

Termomehanske lastnosti materiala so bile pridobljene z eksperimenti in so sledeče: $E_m=24$ GPa ; $E_a=43$ GPa ; $A_s=57$ °C ; $A_f=67$ °C ; $C=5.6$ MPa/°C ; $\varepsilon_{s0}=2\%$ (tlačna preddeformacija); $\alpha_s=4.4 \times 10^{-5}$ 1/K ; $L_{s0}=40$ mm ; $d_1=2.5$ mm ; $d_2=3$ mm.

Na *Sliki 5* je razvidno da se največje razmerje med uklonsko silo optimirane in neoptimirane palice pojavi pri $L_1/2=6$ mm, tako pri izmerjenih kot tudi pri izračunanih rezultatih. Eksperimentalno določena uklonska sila za palico optimalne oblike je le 5.7% višja od uklonske sile neoptimirane palice, medtem ko izračunane uklonske sile kažejo 19% razliko. Slednja razlika je po našem mnenju posledica določenih predpostavk v računskem modelu, in sicer upoštevamo da je predhodna deformacija konstantna po dolžini palice, kar za optimiran nosilec ne drži. Če bi hoteli v modelu na osnovi izmerjenih podatkov upoštevati nekonstantno razporeditev preddeformacije po dolžini palice, bi bilo potrebno izdelati predhodne meritve elastičnega modula SMA kot funkcije temperature, za različne velikosti predhodne deformacije.



Slika 5: Razmerje med uklonsko silo oz. temperaturo optimirane palice in uklonsko silo oz. temperaturo neoptimirane palice, kot funkcija dolžine $L_1/2$.

Na *Sliki 5* opazimo da je razmerje uklonske temperature optimirane palice in neoptimirane palice prav tako največje pri $L_1/2=6$ mm. Eksperimentalno določena temperatura uklona palice optimalne oblike je le 2.2% višja od uklonske temperature neoptimirane palice, medtem ko se izračunane temperature razlikujejo za 4%. Zato bi lahko v okoliščinah, kjer se

zahteva konstantna temperatura uklona, ob čemer oblika SMA palice ni povsem enaka, uspešno uporabili fenomen uklona SMA palice zaradi ovirane povračljivosti.

Zaključimo lahko da je optimalna oblika SMA palice tista, kjer ima palica dolžino stopnice $L_1/2=6\text{mm}$.

7 Zaključek

Prispevek opisuje raziskovalno delo s področja termomehanskih lastnosti SMA v tlačnem območju med pojavom ovirane povračljivosti. Tlačna sila, ki se med ovirano povračljivostjo pojavi v SMA palici, je izračunana kot funkcija temperature za poljubno obliko palice poljubnega prereza. Modul elastičnosti je kot funkcija temperature izračunan po celotni dolžini palice nekonstantnega prereza. Geometrijska optimizacija je izdelana za palico okroglega prereza z izbiro oblike, Slika 4, kjer je bil naš cilj določiti optimalno dolžino stopnice $L_1/2$. Izračunane uklonske sile in temperature izkazujejo dobro ujemanje z izmerjenimi vrednostmi. Vendarle pa izmerjena uklonska sila optimirane SMA palice ni znatno večja od tiste pri neoptimirani SMA palici, zato bi v prihodnje veljalo poiskati drugačno obliko optimalno palice, predvidoma z neko zvezno spremenljivo funkcijo prereza palice po dolžini.

Literatura

- [1] F. Auricchio, J.Lubliner, *A Generalized plasticity and shape-memory alloys*, International Journal of Solids and Structures 33, 991-1003, 1996.
- [2] L.C. Brinson, M.S. Huang, *Simplifications and Comparisons of Shape Memory Alloy Constitutive Models*, Journal of Intelligent Material Systems and Structures 7, 108-114, 1996.
- [3] T. Duerig, A. Pelton, D. Stöckel, *An Overview of Nitinol Medical Applications*, Materials Science and Engineering A273-275, 149-160, 1999.
- [4] T.W. Duerig in ostali, *Engineering Aspects of Shape Memory Alloys*, Butterworth – Heinemann, 1990.
- [5] H. Kato, N. Inagaki, K. Sasaki, *A One-Dimensional Modelling of Constrained Shape Memory Effect*, Acta Materialia 52, 3375-3382, 2004.
- [6] F. Kosel, T. Videnič, *Generalized plasticity and uniaxial constrained recovery in shape memory alloys*, Mechanics of advanced materials and structures 14-1, 3-12, 2007.
- [7] J. Kunavar in ostali, *Buckling of Shape Memory Alloy Column due to Constrained Recovery*, Journal of Mechanics - članek v fazi popravkov, do konca junija bo sprejet.
- [8] A.A. Movchan, L.G. Sil'chenko, *Buckling of a Rod Undergoing Direct or Reverse Martensite Transformation Under Compressive Stresses*, Journal of Applied Mechanics and Technical Physics 44(3), 442-449, 2003.
- [9] S.P. Timoshenko, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, New York, 1961.
- [10] T. Videnič in ostali, *Biaxial constrained recovery in shape memory alloy rings*, Journal of intelligent materials system and structures 19-8, 861-874, 2008.



Primerjava določenega in predoločenega sistema v metodi robnih elementov s podobmočji

J. Lupše¹, L. Škerget¹ in J. Ravnik¹

Povzetek. V članku je predstavljena primerjava uspešnosti določenega in predoločenega sistema enačb numeričnega modela, ki nastane pri opisu toka nestisljive viskozne tekočine z metodo robnih elementov. Pri uporabi določenega sistema je pomembno, da lahko za reševanje problemov uporabimo matematične reševalce in predpogojevalce za kvadratne systemske matrike. Primerjali smo RBICGSTAB ter LSQR matematična reševalca, pri čemer je prvi namenjen izključno reševanju določenega sistema, med tem ko je slednji primeren tudi za reševanje predoločenega sistema. Za opis toka je bila uporabljena dvo-dimenzionalna hitrostno-vrtinčna oblika Navier-Stokesovih enačb. Enačbe so bile diskretizirane z metodo robnih elementov, za katero smo uporabili Laplaceovo in difuzivno-konvektivno osnovno rešitev. V vseh primerih je bil izračun pri uporabi določenega sistema enačb hitrejši, kar smo pripisali uporabi hitrejšega matematičnega reševalca in predpogojevalca ter delno tudi zmanjšanju velikosti sistema v primerjavi s predoločenim sistemom.

Abstract. In this article we present comparison of determined and overdetermined system of equations of numerical model, which describes incompressible viscous fluid flow. System matrix of mathematical system to solve is now cast in square form instead of rectangular, what allows use of different solvers. RBICGSTAB and LSQR solvers were compared. The first one is meant for solving determined equation systems while the latter one can be used for overdetermined systems also. For flow description two-dimensional velocity-vorticity formulation of Navier-Stokes equations was used. System of equations was then discretized with boundary element method where Laplace and diffusive-convective fundamental solutions were used. For all cases we observed acceleration of solution procedure by using determined equation system. This speed-up was due to use of faster solver and preconditioner and also by reducing system size in comparison with overdetermined system.

1 Uvod

Za opis toka nestisljive viskozne tekočine uporabimo Navier-Stokesov sistem enačb. Sistem je sestavljen iz ohranitvenih zakonov ter reoloških modelov, ki ga zaključijo. Splošno razširjena oblika vsebuje zakon ohranitve mase ter gibalno enačbo v hitrostno-tlačni obliki. Če se omejimo na izotermne tokove, lahko enačbo ohranitve energije izpustimo. Takšen sistem lahko

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

pretvorimo v diskretno obliko z različnimi numeričnimi metodami (npr. metoda končnih elementov ali metoda končnih volumnov). Za diskretizacijo s pomočjo metode robnih elementov pa je bolj primerna oblika enačb, v kateri gibalno enačbo zapišemo v hitrostno-vrtinčni obliki [6]. Ena od prednosti takšne oblike je, da tlak iz vodilnih enačb izpade, s čimer se izognemo določenim problemom [9]. Tudi sama metoda robnih elementov ima določene prednosti pred ostalimi metodami. Med glavnimi je ta, da odvodi funkcije že nastopajo v sami rešitvi enačb; torej za npr. pridobitev fluksov na robovih območja ni potrebna interpolacija vrednosti, kar omogoča večjo natančnost izračunov. Ker uporabljamo za utežno funkcijo osnovne rešitve enačb (npr. Laplaceovo) so mehanizmi prenosa že popisani v sami osnovni rešitvi. Seveda pa ima metoda tudi slabosti. Med prvimi omenimo zapletenost implementacije. Ker v enačbah nastopajo integrali z bolj ali manj zapletenim jedrom, smo v najpreprostejših primerih omejeni z zapleteno analitično ali numerično integracijo. Uporabimo tudi kolokacijsko metodo, kar pomeni, da moramo poznati tudi vrednosti singularnih integralov, katerih vrednosti imajo velik vpliv na končno rešitev. Enoobmočna metoda robnih elementov je spominsko zelo zahtevna, zato uporabljamo metodo podobmočij. Pri tej metodi navadno dobimo sistem enačb z več enačbami, kot neznankami (predoločen sistem), ki da pravokotno sistemsko matriko. Za takšne sisteme, pa je izbira matematičnih reševalcev močno omejena.

V članku obravnavamo zamisel, pri kateri sestavimo sistemsko matriko, ki je kvadratna; torej sestavimo sistem z enakim številom neznank, kot imamo enačb. Za takšen sistem obstaja veliko večji nabor matematičnih reševalcev, kateri so tudi hitrejši od reševalca za predoločene sisteme. V nadaljevanju bo predstavljena osnovna zamisel, ter tudi primerjava med uporabo LSQR [3] ter RBICGSTAB [8] matematičnih reševalcev na primeru toka v kanalu ter gnane kotanje.

2 Vodilne enačbe

2.1 Hitrostno-vrtinčna oblika enačb

Kot je bilo predstavljeno v uvodu, Navier-Stokesov sistem enačb zapišemo v hitrostno-vrtinčni obliki. V tej obliki enačbe razdelimo na kinematični ter kinetični del. Za primer nestisljivega toka zapišemo enačbo kinematike kot

$$\Delta \vec{v} + \nabla \times \vec{\omega} = 0. \quad (1)$$

Enačbo kinetike za primer nestisljivega toka pa zapišemo kot

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \nu_0 \Delta \vec{\omega} + (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v}, \quad (2)$$

pri čemer smo privzeli konstantne snovne lastnosti. ν_0 je dinamična viskoznost, \vec{v} je vektor hitrosti, $\vec{\omega}$ pa vektor vrtinčnosti. Ker se bomo v nadaljevanju omejili na reševanje dvodimenzionalnih tokov, ima vektor vrtinčnosti različno od nič samo komponento pravokotno na ravnino toka. Zadnji člen na desni strani enačbe (2) zato odpade. Enačbi (1) in (2) je potrebno pretvoriti v integralsko ter nato v ustrežno diskretno obliko.

2.2 Integralna oblika enačb

Iz enačbe (1) je izpeljana integralna enačba za izračun robnih vrednosti vrtinčnosti

$$c(n_x v_y - n_y v_x) + n_x \cdot \int_{\Gamma} v_y q^* d\Gamma - n_y \cdot \int_{\Gamma} v_x q^* d\Gamma = \\ n_x \cdot \int_{\Gamma} v_x q_t^* d\Gamma + n_y \cdot \int_{\Gamma} v_y q_t^* d\Gamma + n_x \cdot \int_{\Omega} \omega q_x^* d\Omega + n_y \cdot \int_{\Omega} \omega q_y^* d\Omega \quad (3)$$

ter integralna enačba za izračun območnih vrednosti hitrosti;

$$c \cdot v_i + \int_{\Gamma} \left(v_i q^* - \frac{\partial v_i}{\partial n} u^* \right) d\Gamma = \int_{\Omega} e_{ij} \omega q_j^* d\Omega + \int_{\Gamma} e_{ij} \omega u^* n_j d\Gamma. \quad (4)$$

Več o gornji izpeljavi v [7]. V enačbah (3) in (4) je c geometrijski koeficient, ki je odvisen od lege izvorne točke, n_j komponenta normale na robni element, u^* fundamentalna rešitev parcialne diferencialne enačbe, q^* njen normalni odvod, q_t^* tangentni odvod ter q_j^* odvod po koordinati ($j = x, y$). Ω predstavlja območje, Γ pa rob območja. e_{ij} je Levi-Civita simbol v dveh dimezijah. Integralna oblika prenosne enačbe vrtinčnosti je

$$c \cdot \omega + \int_{\Gamma} \left(\omega q^* - \frac{\partial \omega}{\partial n} u^* \right) d\Gamma = \frac{1}{v_0} \left[\int_{\Omega} v_j \omega q_j^* d\Omega - \int_{\Gamma} v_n \omega u^* d\Gamma \right] - \frac{1}{v_0} \int_{\Omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} u^* d\Omega, \quad (5)$$

kjer $\frac{\partial}{\partial t}$ predstavlja odvod po času in $v_n = v_j \cdot n_j$. Ker smo reševali stacionarni tok, zadnji člen v enačbi (5) odpade.

3 Sistemska matrika

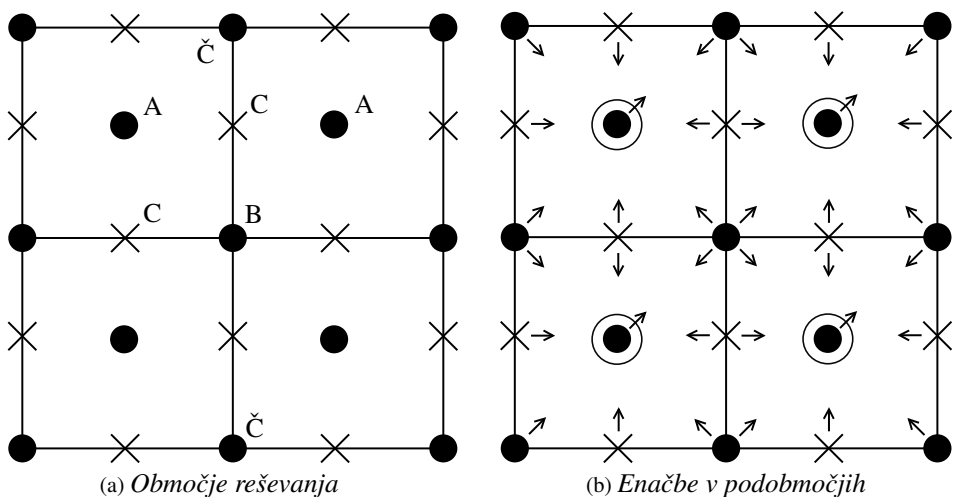
Primer zlaganja sistema enačb predstavimo na območju reševanja velikem 2x2 podobmočju. V takšnem območju reševanja imamo 4 podobmočja in 25 mrežnih vozlišč. Po robovih območja imamo znane ali Dirichletove ali Neumannove robne pogoje.

Zaradi kombinacije kvadratne in konstantne interpolacije za funkcijske vrednosti uporabimo vsa mrežna vozlišča, za vrednosti normalnih odvodov pa le vsako vozlišče, ki leži na sredini roba podobmočja (glej sliko 1a). Postopek zlaganja sistema je takšen, da v vsako mrežno vozlišče postavimo izvirno točko in zapišemo pripadajočo enačbo. V odvisnosti od lege, razdelimo vozlišča na; vozlišča v notranjosti območja in vozlišča na robu območja.

1. Znotraj območja imamo različne tipe vozlišč:

- Vozlišče A leži v središču podobmočja. V tem območju je neznanka samo vrednost funkcije. Ker leži v notranjosti podobmočja uporabimo eno samo eksplisitno enačbo.
- Vozlišče B leži v kotu podobmočja. Tudi tukaj je neznanka samo vrednost funkcije, a vozlišče pripada več podobmočjem. Torej lahko za to vozlišče zapišemo toliko enačb, kolikor je podobmočij, katerih del je to vozlišče. Ker je neznanka v vseh primerih ista, enačbe seštejemo.

- Vozlišče C leži na robu podobmočja in meji na sosednje podobmočje. Tukaj pa imamo dve neznanki; vrednost funkcije in vrednost njenega normalnega odvoda. Za vsako podobmočje lahko zapišemo le eno enačbo, zato obeh enačb ne smemo sešteti. Posebno pozornost je potrebno nameniti še predznakom normalnega odvoda funkcije, saj si morata biti vrednosti iz sosednjih podobmočij nasprotno enaki; ($q_{levo} = -q_{desno}$).
2. Tudi na robu območja imamo več različnih tipov vozlišč zaradi njihove lege ter različnih robnih pogojev. V primeru znane funkcije (Dirichletov robni pogoj) je lahko v določenih vozliščih neznanka samo normalni odvod. Tako imamo na takšnem robu samo enačbe za normalni odvod funkcije. Drugače je, če imamo Neumannov robni pogoj (znan normalni odvod funkcije). V tem primeru v vozliščih s poznanim normalnim odvodom iščemo samo vrednost funkcije, v vozliščih Č, kjer pa normalnega odvoda nimamo, enačbe ponovno seštevamo, podobno kot pri vozliščih B.



Slika 1: Prikaz mreže velikosti 2x2 elementa; • označuje vozlišča, kjer nastopa samo vrednost funkcije, × označuje vozlišča, kjer nastopa tako vrednost funkcije kot vrednost njenega normalnega odvoda, → označuje enačbe v danem vozlišču in kaže na vplivno območje.

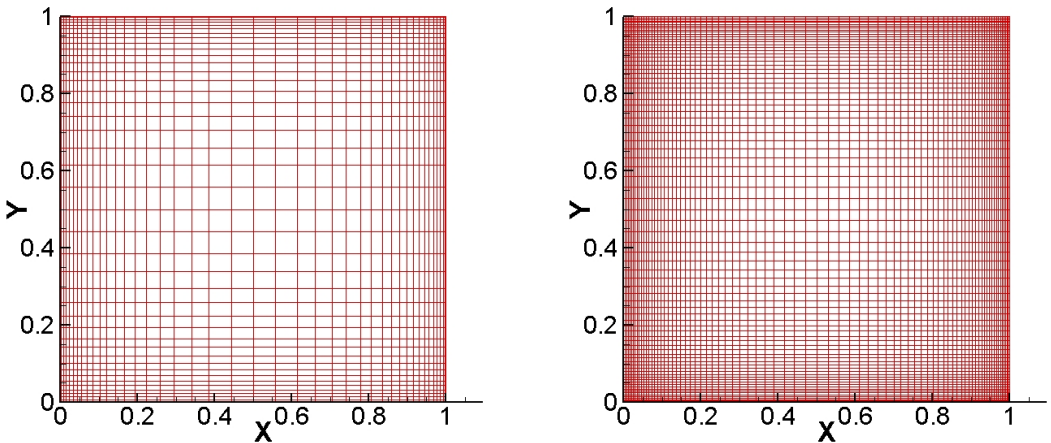
Opisani postopek da za velikost sistemske matrike število vseh funkcijskih vozlišč plus število vseh vozlišč z normalnimi odvodi minus število znanih robnih pogojev, matrika pa je kvadratna (ima enako število enačb kot neznank). Zaradi lažjega sestavljanja sistemske matrike v njo vključimo tudi trivialne enačbe z znanimi vrednostmi robnih pogojev. To sicer poveča velikost sistemske matrike, a nam omogoči enako oštevilčenje vrstic sistemske matrike, kot je oštevilčenje mrežnih vozlišč, kar znatno olajša samo zlaganje matrike. Dodatno delo tako predstavlja le še oštevilčenje vrstic sistemske matrike z normalnim odvodom funkcije kot neznanko. Pri takšnem načinu zlaganja sistemske matrike ostane v njej veliko število ničelnih

elementov, saj je v vrstici matrike lahko največ 33 neničelnih elementov. Zato je smiselno takšno matriko zapisati v CRS (compressed row storage) ali kakšnem drugem podobnem zapisu, ki omogoča izpuščanje ničelnih elementov in s tem velike prihranke pri uporabljenem računalniškem spominu.

Predoločen sistem dobimo, če enačb ne seštevamo. Postopek je podrobno opisan v [4]. V splošnem pri tem postopku dobimo večjo sistemsko matriko. Tudi pri tem postopku je rezultat sistemska matrika z velikim številom ničelnih elementov, kjer lahko uporabimo enak postopek za zmanjšanje porabe spomina, kot pri določenem sistemu.

4 Primerjava rezultatov na primeru gnane kotanje

Primerjava pristopa z določeno ter pristopa s predoločeno sistemsko matriko je bila opravljena na primeru gnane kotanje. V vseh primerih je bila simulacija pognana brez začetnega približka vrednosti vrtnčnosti ter hitrostnega polja ($\omega = 0$, $\vec{v} = 0$).



(a) Mreža 20x20 podobmočij

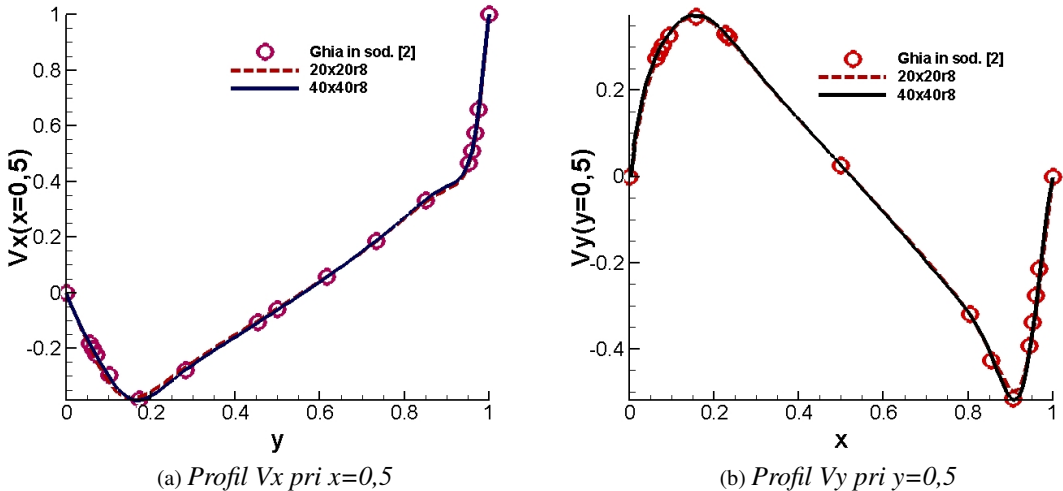
(b) Mreža 40x40 podobmočij

Slika 2: Mreži uporabljeni za preračun problema gnane kotanje.

Za primerjavo smo uporabili dve mreži različnih gostot. Redkejša mreža je imela 20x20, gostejša pa 40x40 podobmočij. Obe mreži sta bili zgoščeni proti robu območja, z razmerjem med najširšim in najožjim elementom, $r = 8 : 1$. Območje je bilo velikosti enotskega kvadrata. Na zgornjem robu je bila predpisana brezdimenzijska hitrost 1, na ostalih pa 0, kar pomeni trdno steno. Za gnano kotanje Reynoldsovo število definiramo kot $Re = \frac{vL}{\nu}$, kjer je v hitrost zgornje ploskve, L je širina kotanje, v našem primeru enaka 1 ter ν dinamična viskoznost. Ker je hitrost ploskve vezana na celotni zgornji rob, karakteristična dolžina pa na geometrijo kotanje, je za

numerično simulacijo najbolj praktično spreminjanje dinamične viskoznosti za spreminjanje Reynoldsovega števila.

Simulacijo smo zagнали za tri različne vrednosti Reynoldsovega števila; 1, 100 in 1000. Na sliki (3) prikazujemo primerjavo rezultatov določenega sistema z numerično simulacijo Ghia in sod. [2] rezultati za vrednost Reynoldsovega števila 1000.



Slika 3: Primerjava profila hitrostnega polja pri Reynoldsovem številu 1000 za mreži 20x20 in 40x40 podobmočij z numerično simulacijo Ghia in sod. [2]

V tabelah 1 in 2 je podana kvantitativna primerjava hitrosti reševanja za različne primere matematičnih reševalcev in osnovnih rešitev. Merjen je bil realni (zidni) čas od vstopa programa v reševalec, do izstopa iz njega. Z a. in b. smo označili določena sistema; prvega rešenega z RBICGSTAB matematičnim reševalcem ter ILU predpogojevalcem [5] in drugega rešenega z LSQR matematičnim reševalcem. S c. in č. smo označili predoločena sistema rešena z LSQR reševalcem. V prvih treh primerih je bila uporabljena Laplaceova osnovna rešitev, v primeru č. pa je bila uporabljena konvektivno-difuzivna osnovna rešitev.

V primerih a. in b. je bil v sistemsko matriko vključen samo mehanizem difuzije, medtem ko je v primerih c. in č. bila vključena tudi konvekcija.

V vseh primerih se je določen sistem z RBICGSTAB reševalcem in ILU predpogojevalcem izkazal za najhitrejšega. Delni vzrok temu je tudi manjši sistem od predločenega, saj je delež enačb v določenem sistemu združen, zato je dodana še primerjava z določenim sistemom in LSQR reševalcem. Preverili smo še CGS in RGMRES matematična reševalca, katera pa sta se po hitrosti izkazala primerljiva z RBICGSTAB.

Tabela 1: Primer gnane kotanje - mreža 20x20 podobmočij

Re 1				
Primer	a.	b.	c.	č.
Normirani čas reševalca	1	5,3	5,8	5,9
Iteracije reševalca	10742	247611	239280	246570
Čas na iteracijo	0,013 s	0,070 s	0,076 s	0,074 s
Iteracije zanke	601	601	606	636
Re 100				
Primer	a.	b.	c.	č.
Normirani čas reševalca	1	5,8	8,3	6,8
Iteracije reševalca	12750	131416	1349376	1016668
Čas na iteracijo	0,014 s	0,080 s	0,117 s	0,092 s
Iteracije zanke	622	622	606	636
Re 1000				
Primer	a.	b.	c.	č.
Normirani čas reševalca	1	5,2	10,4	7,7
Iteracije reševalca	35448	761802	1349376	1016668
Čas na iteracijo	0,017 s	0,086 s	0,158 s	0,109 s
Iteracije zanke	1511	1511	1772	1788

Tabela 2: Primer gnane kotanje - mreža 40x40 podobmočij

Re 1				
Primer	a.	b.	c.	č.
Normirani čas reševalca	1	7,2	4,7	4,6
Iteracije reševalca	23639	737605	410638	410629
Čas na iteracijo	0,066 s	0,473 s	0,310 s	0,307 s
Iteracije zanke	1060	1060	1057	1056
Re 100				
Primer	a.	b.	c.	č.
Normirani čas reševalca	1	7,8	5,8	4,6
Iteracije reševalca	30381	913887	598690	488994
Čas na iteracijo	0,075 s	0,584 s	0,410 s	0,326 s
Iteracije zanke	1103	1103	1163	1159
Re 1000				
Primer	a.	b.	c.	č.
Normirani čas reševalca	1	7,0	9,7	7,1
Iteracije reševalca	61093	1719987	2023099	1511363
Čas na iteracijo	0,082 s	0,573 s	0,567 s	0,419 s
Iteracije zanke	2031	2031	2835	2820

5 Zaključek

Po primerjavi hitrosti reševanja določenega in predoločenega sistema na gnani kotanji, je bila v vseh primerih opažena znatna pospešitev hitrosti reševanja problema za določen sistem. Takšno pospešitev hitrosti reševanja je potrebno pripisati predvsem hitrejšim matematičnim reševalcem z ustreznim predpogojevalcem, del pa tudi zmanjšanju velikosti sistema zaradi seštevanja enačb. Poleg pospešitve izračuna je dobra stran uporabe drugih matematičnih reševalcev tudi v lažji in učinkovitejši paralelizaciji [1]. V prihodnosti nameravamo preveriti še možnosti implementacije za primere z nelinearnimi snovnimi lastnostmi ter nato tudi uporabo za reševanje turbulentnih tokov.

Literatura

- [1] R.D. Da Cunha and T. Hopkins. The parallel iterative methods (pim) package for the solution of systems of linear equations on parallel computers. *Applied Numerical Mathematics*, 19(1-2):33–50, 1995.
- [2] U. Ghia, K.N. Ghia, and C.T. Shin. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *J. Comput. Phys.*, 48:387–411, 1982.
- [3] C.C. Paige and M.A. Saunders. Lsqqr: An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 8(1):43–71, 1982.
- [4] J. Ravnik, L. Škerget, and Z. Žunič. Combined single domain and subdomain bem for 3d laminar viscous flow. *Engineering analysis with boundary elements*, 33(3):420–424, 2009.
- [5] Y. Saad and Y. Saad. *Iterative methods for sparse linear systems*. PWS Pub. Co., 1996.
- [6] L. Škerget, M. Hriberšek, and Z. Žunič. Natural convection flows in complex cavities by bem. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 13(6):720–735, 2003.
- [7] L. Škerget and N. Samec. BEM for the two-dimensional plane compressible fluid dynamics. *Engineering analysis with boundary elements*, 29(1):41–57, 2005.
- [8] G.L.G. Sleijpen and D.R. Fokkema. Bicgstab (l) for linear equations involving unsymmetric matrices with complex spectrum. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 1(11):2000, 1993.
- [9] M. Thomadakis and M. Leschziner. A pressure-correction method for the solution of incompressible viscous flows on unstructured grids. *International Journal for numerical methods in fluids*, 22(7):581–601, 1996.



Oblikovanje aerodinamskega aktuatorja za ciljno pršenje v trajnih nasadih in merjenje tokovnih parametrov

A.Malneršič¹, M.Hočevar¹, T.Godeša², B.Širok¹, A.Osterman¹

Design of aerodynamic actuator for precision target spraying in orchards and measuring of flow parameters

Povzetek. V prispevku sta predstavljena dva modela aerodinamskih aktuatorjev z diagonalnim, radialnim in nasprotno vrtečim aksialnim ventilatorjem za ciljno pršenje ter metode za merjenje parametrov zračnega toka na različnih razdaljah. Zračni tok mora na razdalji 30-50cm dosegati zadostno hitrost in stopnjo turbulence za učinkovit prenos pesticida na ozko ciljno območje. Izmeriti je potrebno aksialno, tangencialno in radialno hitrost ter stopnjo turbulence. Za to sta najprimernejši peluknjična sonda in anemometer z vročo žičko.

Abstract. This paper presents two models of aerodynamic actuators with diagonal, centrifugal and counter rotating axial fan for precision target spraying and methods of measuring air flow parameters at different distances. At distance 30-50cm air flow must reach certain speed and turbulence level for efficient transfer of pesticide on target. Measured parameters are axial, tangential and radial velocity and turbulence level. Most appropriate devices are 3-dimensional directional probe and hotwire anemometer.

1 Uvod

Varstvo rastlin pred boleznimi, škodljivci in pleveli je nujno za količinsko in kakovostno dober pridelek. Lahko se izvaja na različne načine, danes pa so še vedno prevladujoči kemični postopki zaščite. Z zaščito rastlin s pomočjo različnih kemičnih sredstev poskušamo zatreti škodljive organizme in preprečiti okužbe z boleznimi (glivične bolezni, bakterijske in bolezni rastlinskega izvora). Problemi onesnaževanja tal, podtalnice, zraka, rastlin in živali so postali ključnega pomena za sodobno kmetijstvo. Trajnostno kmetijstvo zato mora slediti zmanjševanju negativnega vpliva na življenjsko okolje. Težnja v EU in Slovenije je zaradi zaostrovanja predpisov glede varstva okolja pri uporabi pesticidov, doseči zmanjševanje porabe teh sredstev. Ogromne količine pesticidov trenutno ne končajo na ciljnih površinah (rastline itn.) ampak preidejo v okolje [1], kar povzroča ekološke škode ogromnih razsežnosti, ki se odraža v onesnaževanju - zastrupljanju ozračja, vode in prsti. Obstaja vrsta

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

² Kmetijski inštitut Slovenije

raziskav, kjer so poizkušali čim bolj minimizirati izgube in povečati nanos sredstev na ciljne površine [5][6][7].

Namen projekta je zmanjšanje količine pesticidov, ki predstavljajo ogromno obremenitev okolja (tla, podtalnica, zrak, rastline itn.) ob doseganju zadovoljivega fitoterapevtskega učinka. Zmanjšanje količine teh sredstev lahko dosegamo samo z njihovim natančnejšim nanašanjem na ciljne površine. Stranski rezultati pri razvoju pršilnikov nove generacije pa so tudi zmanjšana poraba energentov in povečane učinkovitost pri nanosu pesticidov.

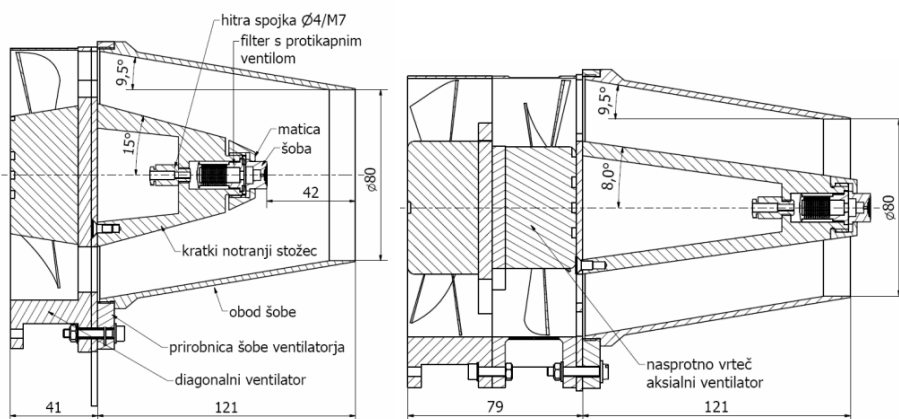
Cilj evropskega projekta CROPS (<http://www.crops-robots.eu/>) je razvoj strojev, opreme in postopkov za zgodnjo detekcijo bolezni in nanašanje pesticidov, še preden se bolezen razširi. S tem se bo zmanjšalo obremenitve okolja (tla, podtalnica, zrak, rastline) s pesticidi ter porabo energije za njihovo obratovanje. Zahteve po vse večji učinkovitosti in obenem ekonomičnosti strojev, psihofizični razbremenitvi uporabnika stroja, zmanjševanju negativnega vpliva stroja in postopka na okolje zaradi vse strožjih ekoloških predpisov ni mogoče zagotoviti brez uvajanja sodobnih strojev in postopkov za nanašanje pesticidov.

Za namen ciljnega pršenja želimo izdelati aerodinamski aktuator s pršilno šobo, ki se bo pritrdil na robotsko roko. Pršilna šoba brizga pršilno brozgo vodoravno s kotom razprševanja 30°. Zračni tok iz aerodinamskega aktuatorja prenaša pršilno brozgo na ciljne površine. Zračni tok mora biti primerno turbulenten, tako da prenaša kapljice pesticida tudi na površine na zadnji strani plodov oziroma obrača liste tako, da je spodnja stran izpostavljena kapljicam. Hitrosti in usmerjenost pršilne brozge mora biti taka, da čim več kapljic ostane na ciljni površini in znotraj krošnje. Obstajajo že sistemi za neposredno škropljenje plevelov na tleh, ki so jih razvili Hong in sod. [2], D.C. Slaughter in sod. [3] ter G. Belforte in sod. [4]. V teh primerih zračni tok ni potreben, saj se pleveli nahajajo na tleh, usmerjenost šobe je navpično navzdol, ciljne površine pa so samo zgornje površine listov plevelov. V našem primeru robot zazna in pozicionira obolelo mesto znotraj krošnje, pripelje roko z aktuatorjem ter ga poškropi. To mesto se lahko nahaja znotraj krošnje, kamor robotska roka ne seže, zato mora biti doseg škropilne brozge 30-50cm, premer tarče pa približno 20cm.

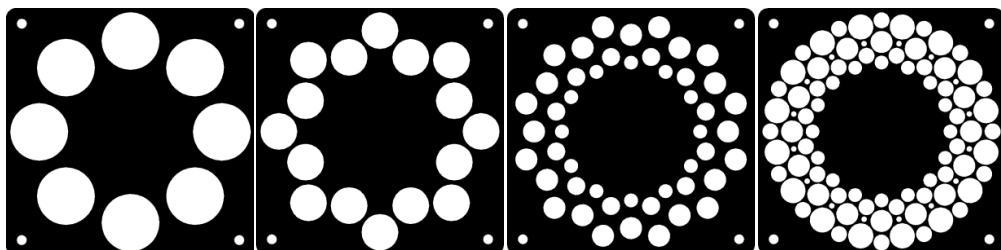
Namen predstavljene eksperimentalne raziskave je določitev komponent izstopnih hitrosti in stopnje turbulence zračnega toka, ki bodo omogočali natančno nanašanje pesticidov ob minimalni izgubi pesticidov v okolje.

2 Aerodinamski aktuator

Aerodinamski aktuator je sestavljen iz diagonalnega ali dvojnega nasprotno vrtečega aksialnega ventilatorja, nosilnega stožca pršilne šobe ter oboda aerodinamske šobe. Verzijo z diagonalnim ventilatorjem smo pritrdili tudi na radialni ventilator z usmerjevalniki, ki so izničili tangencialne hitrosti v cevi. Izdelali smo dva oboda z premeroma izstopne odprtine 80 in 90mm, vendar je bil tok zraka iz večjega preširok. Z diagonalnim in radialnim ventilatorjem smo uporabili kratki stožec z dolžino 60mm, največjim premerom 67mm in kotom 15° (Slika 1). Pri prehodu na nasprotno vrteč aksialni ventilator smo zmanjšali kot stožca na 7,5°. Zaradi manjšega premera pesta je bil največji premer stožca 60mm, dolžina pa je znašala 112mm. Pri krajšem stožcu je bila med stožcem in matico za pritrditev škropilne šobe 2mm široka reža, ki pa ni močno vplivala na rezultate. Pri daljšem stožcu reže ni bilo. Pri nasprotno vrtečem rotorju se je tik za ventilator dodalo generatorje turbulence prikazane na sliki 2, kjer naj bi se turbulenca generirala na stiku med gibajočim in mirujočim zrakom.



Slika 1: Aerodinamski aktuator z vsemi komponentami in novi aktuator z nasprotno vrtečim rotorjem in daljšim stožcem



Slika 2: Generatorji turbulence po vrsti

3 Merilni postopki

3.1 Meritev lokalnih hitrosti

Lokalne hitrosti so bile izmerjene s petluknjično sondo (United Sensor 3-Dimensional Directional probe DA). Pri meritvah je bilo predpostavljeno, da je tok zraka stacionaren za vsako nastavljeno delovno točko in da je simetričen glede na os vrtenja rotorja.

Velikost hitrosti, oziroma pripadajoče komponente hitrosti so izračunane iz razmerij izmerjenih tlakov na petluknjični sondi, izmerjenega kota α ter umerjevalnih algoritmov, ki so podani na osnovi predhodnega umerjanja sonde. Diference statičnega tlaka na posameznih tlačnih priključkih sonde so bile simultano zajete s tlačnimi senzorji Endres Hauser PMD 235.

Meritve so bile izvedene na razdaljah 0, 100, 200 in 300 mm od ustja aerodinamske šobe. Korak po polmeru smo spreminjali, saj se je z razdaljo zračni tok širil. Koordinatni sistem in merjeni parametri so označeni na sliki 3.

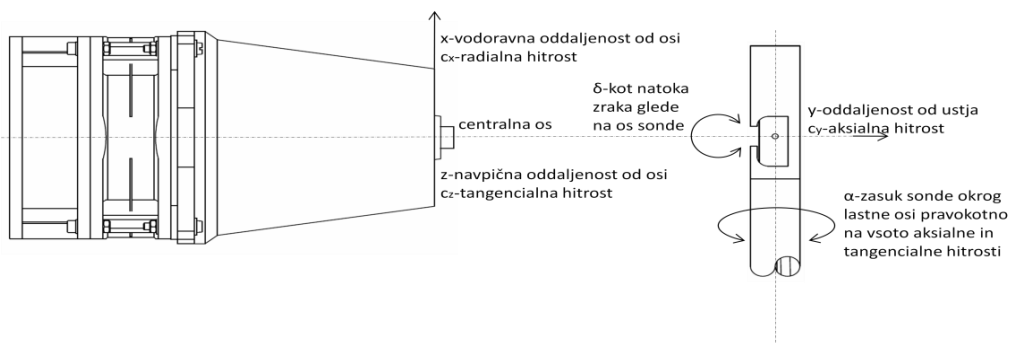
3.2 Meritev stopnje turbulence

Fluktuacije hitrosti so bile določene z enodimenzionalnim Dantec-ovim merilnikom z vročo žičko 55P11 in napajalno-procesno enoto Dantec MiniCTA. Signal je bil vzorčen z 16 bitnim

analogno digitalnim pretvornikom s frekvenco 50000Hz. Pri vsaki meritvi se je izmerilo tudi temperaturo, ki se jo je upoštevalo pri preračunu hitrosti po enačbi 1. T_w je nastavljena temperatura vroče žičke.

$$U = U_{meritve} \cdot \sqrt{\frac{T_w - T_{umerjanja}}{T_w - T_{meritve}}} \quad (1)$$

Stopnja turbulence se izračuna kot koeficient standardnega odmika in srednje vrednosti hitrosti.



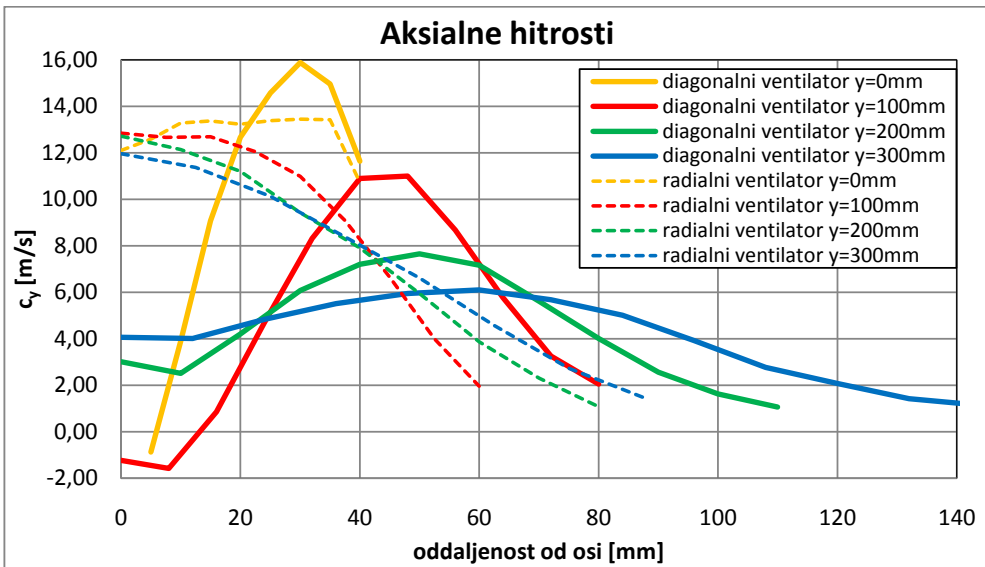
Slika3: Postavitev petluknjične sonde in koordinatni sistem

4 Eksperiment

Eksperiment je bil izveden z diagonalnim ventilatorjem Papst DV 4112 N, radialnim Klima Celje 124CVX160/4 in nasprotno vrtečim aksialnim ventilatorjem Sanyo 9CR1212G002. Napajalna napetost diagonalnega je bila enosmerna 13,8V, nasprotno vrtečega enosmerna 12V, radialni pa je bil priključen na frekvenčni pretvornik tako, da je dosegel enak volumski pretok kot diagonalni. Radialni ventilator je prevelik za uporabo na pršilniku in je bil uporabljen samo za testiranje šobe brez tangencialne komponente hitrosti.

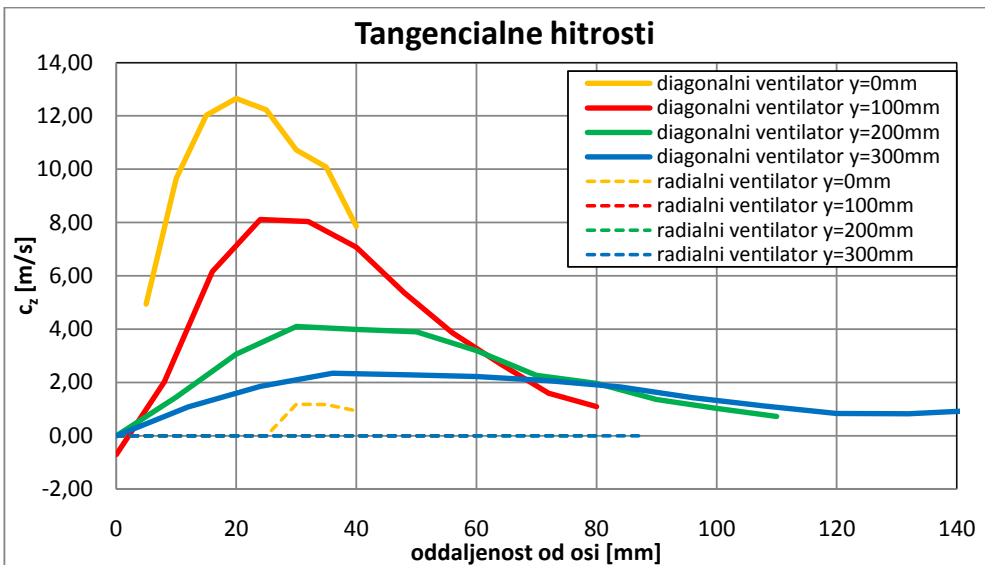
5 Rezultati

Slika 4 prikazuje aksialne hitrosti na različnih oddaljenostih od izstopa iz aerodinamske šobe aktuatorja. Pri diagonalnem ventilatorju je tik na izstopu največ hitrosti na obodu, v okolici osi pa je hitrost celo 0. Z razdaljo se situacija malce popravi, vendar so hitrosti še vedno dokaj nizke. Na razdalji 300mm ima tok zraka z aksialno hitrostjo višjo od 4m/s premer 190mm. Z radialnim ventilatorjem je situacija dosti boljša, saj je pri enakem pretoku hitrost na izstopu skoraj enakomerna. Na oddaljenosti 300mm je premer toka z hitrostjo višjo od 4m/s samo 125mm. Hitrost v notranjosti toka so tudi do trikrat višje. To pomeni, da se visoke hitrosti ohranijo tudi pri večjih razdaljah.

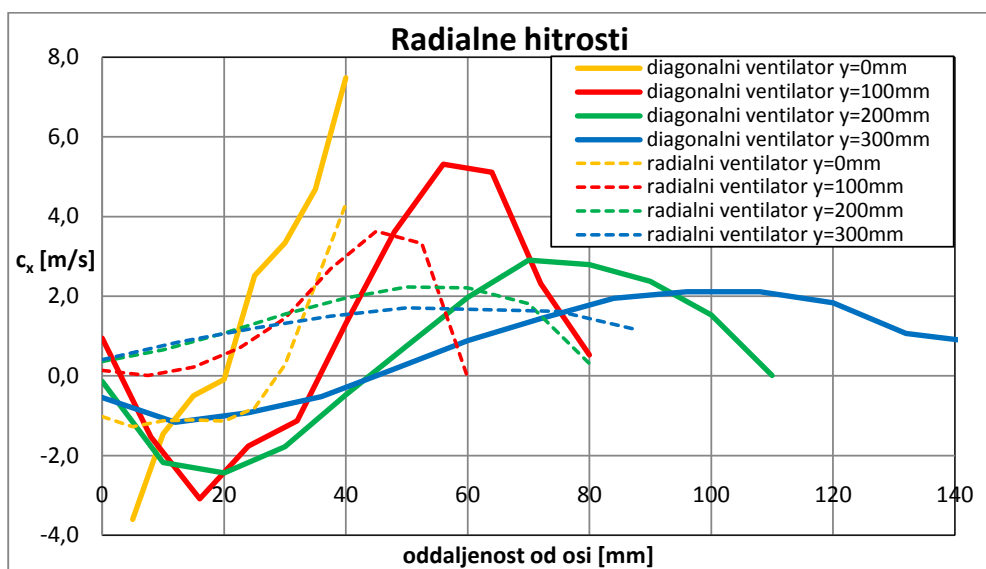


Slika 4: Aksialne hitrosti na različnih razdaljah s kratkim stožcem in diagonalnim ventilatorjem Papst DV 4112 N ter radialnim ventilatorjem Klima Celje 124CVX160/4

Na sliki 5 se vidi, da so tangencialne hitrosti pri radialnem ventilatorju nemerljive, medtem ko so pri diagonalnem zelo visoke. Tangencialne hitrosti so posledica visoke vrtilne hitrosti 6000min^{-1} in tudi povzročajo gibanje večine zračnega toka po obodu ventilatorja in aerodinamske šobe. To se vidi tudi na diagramu radialnih hitrosti na sliki 6. Brez tangencialnih hitrosti so tudi radialne hitrosti dosti nižje in s tem se dobi večino hitrosti v aksialni smeri.

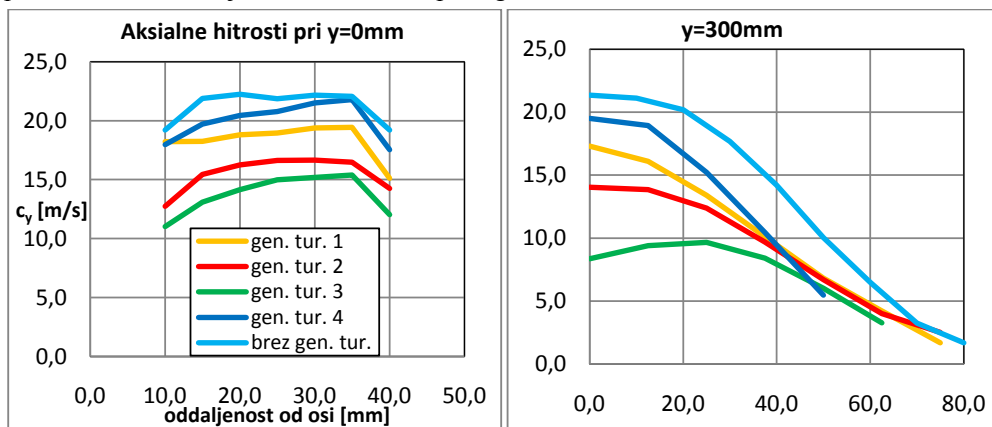


Slika 5: Tangencialne hitrosti na različnih razdaljah s kratkim stožcem in diagonalnim ventilatorjem Papst DV4112 N ter radialnim ventilatorjem Klima Celje 124CVX160/4



Slika 6: Radialne hitrosti na različnih razdaljah s kratkim stožcem in diagonalnim ventilatorjem Papst DV4112 N ter radialnim ventilatorjem Klima Celje 124CVX160/4

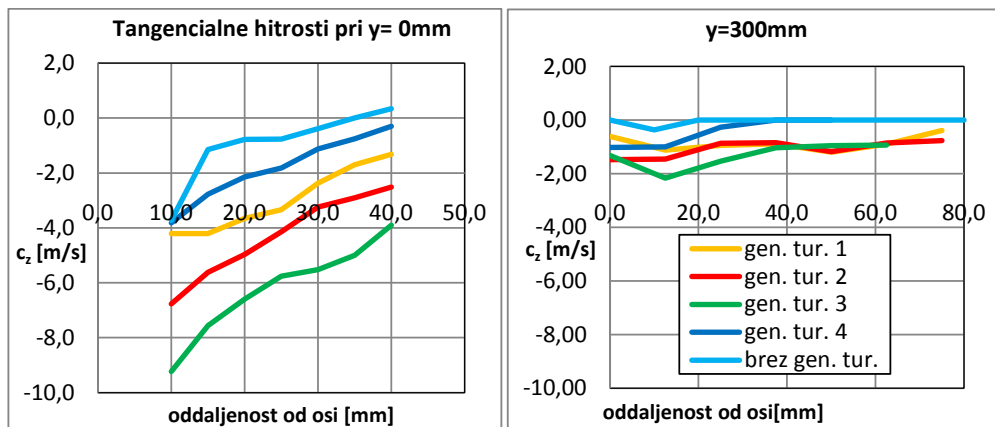
Z diagonalnim ventilatorjem se je dosegalo prenizke hitrosti, zato se ga je zamenjalo z dvojnimi nasprotno vrtečim aksialnim. Zamenjalo se je tudi notranji stožec z daljšim, ki je narejen pod kotom $7,5^\circ$. Pri tem stožcu naj bi zračni tok lepše sledil površini in tako v osi ne bi bilo padca hitrosti. Na sliki 7 se vidi, da zaradi dolžine stožca tik na izstopu ni bilo mogoče merjenje hitrosti na razdalji manj kot 10mm od osi, vendar so aksialne hitrosti zelo enakomerne po celotnem premeru. Na razdalji 300mm padec hitrosti v okolici osi ni velik in premer toka s hitrostjo več kot 5m/s ne presega 130mm.



Slika 7: Primerjava aksialnih hitrosti z nasprotno vrtečim aksialnim ventilatorjem Sanyo 9CR1212G002 brez in z generatorji turbulence

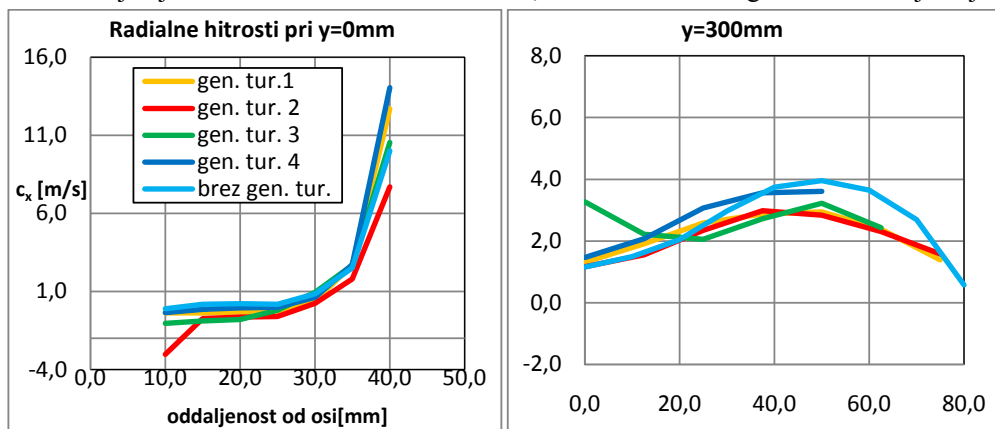
Na sliki 8 se vidi, da je nasprotno vrteči aksialni ventilator zasnovan tako, da se tangencialna komponenta na obodu izniči. Generatorji turbulence dušijo ventilator in s tem pokvarijo kot

natekanja zračnega toka s prvega na drug rotor, kar povzroči povečanje tangencialnih hitrosti. Kljub višjim hitrostim so tangencialne hitrosti nižje kot pri diagonalnem ventilatorju in na razdalji 300mm padejo na zelo nizke vrednosti.



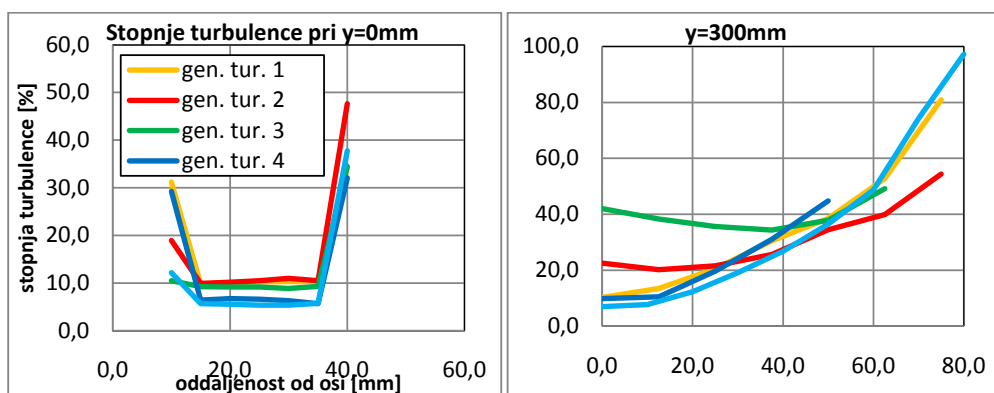
Slika 8: Primerjava tangencialnih hitrosti z nasprotno vrtečim aksialnim ventilatorjem Sanyo 9CR1212G002 brez in z generatorji turbulence

Radialne hitrosti na obodu izstopa iz aerodinamske šobe so višje kot pri diagonalnem ventilatorju, saj so višji tudi tlaki, kar se vidi na sliki 9. Z razdaljo radialne hitrosti padajo vendar so vrednosti še vedno visoke. Zračni tok se zaradi radialnih hitrosti širi in izgublja hitrost. Najnižje radialne hitrosti so v okolici osi, zato so tam tudi izgube hitrosti najmanjše.



Slika 9: Primerjava radialnih hitrosti z nasprotno vrtečim aksialnim ventilatorjem Sanyo 9CR1212G002 brez in z generatorji turbulence

Slika 10 prikazuje izmerjene stopnje turbulence. Na izstopu je oblika diagramov zelo podobna. Pri večjih razdaljah se izstopata generatorja turbulence 2 in 3, kar je posledica nižjih hitrosti in višjega standardnega odklona hitrosti v okolici osi.



Slika 10: Primerjava stopenj turbulence z nasprotno vrtečim aksialnim ventilatorjem Sanyo 9CR1212G002 brez in z generatorji turbulence

6 Zaključki

Zamenjava diagonalnega ventilatorja z dvojnimi nasprotno vrtečimi aksialnimi ventilatorji se je izkazala za uspešno. Hitrosti so višje, v okolici osi ni več hitrostne luknje in širina zračnega toka se ohranja tudi pri večjih razdaljah. Meritve s petluknjično sondo in vročo žičko so se izkazale za primerne za karakterizacijo tokovnih razmer na izstopu iz aerodinamske šobe. Bolje bi bilo, če bi generatorje turbulence pritrdili tik pred izstop iz aerodinamske šobe, saj na trenutni poziciji preveč dušijo ventilator, zaradi česar se pojavijo tangencialne hitrosti.

Projekt CROPS – Clever Robots for Crops, Grant Agreement Number 246252, je financiran s strani Evropske unije.

Literatura

- [1] Y. Gila, C. Sinfortb, Y. Brunetc, V. Polvecheb, B. Bonicellib, *Atmospheric loss of pesticides above an artificial vineyard during air-assisted spraying*, Atmospheric Environment 41, 2945–2957, 2007
- [2] Hong Y. Jeon, Lei F. Tian, *Direct application end effector for a precise weed control robot*, Biosystems engineering 104, 458 – 464, 2009
- [3] D.C. Slaughter, D.K. Giles, D. Downe, *Autonomous robotic weed control systems: A review*, Computers and electronics in agriculture 61, 63–78, 2008
- [4] G. Belforte, R. Deboli, P. Gay, P. Piccarolo, D. Ricauda Aimonino, *Robot Design and Testing for Greenhouse Applications*, Biosystems Engineering 95(3), 309–321, 2006
- [5] J.V. Cross, P.J. Walklate, R.A. Murray, G.M. Richardson, *Spray deposits and losses in different sized apple trees from an axial fan orchard sprayer: 1. Effects of spray liquid flow rate*, Crop Protection 20, 13-30, 2001
- [6] J.V. Cross, P.J. Walklate, R.A. Murray, G.M. Richardson, *Spray deposits and losses in different sized apple trees from an axial fan orchard sprayer: 2. Effects of spray quality*, Crop Protection 20, 333-343, 2001
- [7] J.V. Cross, P.J. Walklate, R.A. Murray, G.M. Richardson, *Spray deposits and losses in different sized apple trees from an axial fan orchard sprayer: 3. Effects of air volumetric flow rate*, Crop Protection 22, 381-394, 2003



Večnivojska metoda končnih elementov za naloge z enostranskimi robnimi pogoji

G. Mejak¹

Multilevel finite element method for problems with unilateral boundary conditions

Povzetek. Predstavljena je večnivojska metoda končnih elementov za naloge z enostranskimi robnimi pogoji.

Abstract. Multilevel finite element method for problems with unilateral boundary conditions is presented.

1 Uvod

V [1] in [2] je bila uporabljena metoda končnih elementov dveh velikostnih skal za reševanje nalog z enostranskimi robnimi pogoji. Kasneje je bila v [3] metoda dveh velikostnih skal posplošena na tri nivojsko metodo končnih elementov. V prvotni formulaciji smo dejansko imeli opravka z dvema velikostnima skalama, zato smo temu primerno imenovali tudi metodo. Posplošitev na več nivojev pa ni več vezana na velikostne skale problema, zato v tem primeru metodo imenujemo večnivojsko metodo. Seveda pa najfinejša diskretizacija še vedno predstavlja diskretizacijo problema na mikro nivoju. Prav tako najbolj grobi diskretizaciji še vedno pravimo makro diskretizacija.

V primeru kompozitnega materiala z nepopolno vezjo med vključki in matriko enostranski robni pogoji preprečujejo prekrivanje vključkov in matrike. Ker interakcija med vključki in matriko nastopa na mikro velikostni skali, prostostne stopnje enostranskega robnega pogoja pripadajo mikro diskretizaciji. V prvotni formulaciji v [1] in [2] smo te prostostne stopnje brez eliminacije direktno prenesli na makro nivo. Tako smo ohranili linearnost mikro problemov in smo vso nelinearnost enostranskih robnih pogojev prenesli na makro nivo. Pri velikem številu vključkov tako na makro nivoju dobimo nalogo z velikim številom enostranskih robnih pogojev,

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

kar predstavlja določeno omejitev, saj naše izkušnje pravijo, da je optimizacijsko nalogo z več kot 10.000 aktivnimi vezmi praktično nemogoče rešiti v realnem času.

V prispevku bomo pokazali, kako je možno prostostne stopnje enostranskih robnih pogojev eliminirati na mikro nivoju. Na ta način lahko s primerno izbiro diskretizacijskih nivojev kontroliramo maksimalno število vezi na vsakem nivoju posebej in potemtakem nismo omejeni z maksimalnim številom dopustnih vezi. V tem primeru naloga na mikro nivoju ni več linearna temveč je optimizacijska naloga z enostranskimi pogoji in tudi vse naloge na naslednjih nivojih so, kot bomo videli, optimizacijske naloge z enostavnimi vezmi. Na vsakem nivoju dobimo večje število podobnih nalog, reševanje katerih je medsebojno neodvisno, zato večnivojska metoda veliko pridobi pri uporabi večprocesorskega računanja.

2 Modelna naloga

Za enostavnejše razumevanje bomo metodo predstavili na modelnem problemu izračunu napetostnega stanja za dvofazni kompozitni material v okviru linearne infinitezimalne elastičnosti. Posplošitev na več faz je konceptualno trivialna, posplošitev na nelinearno elastičnost pa se v bistvu reducira na zaporedje linearnih problemov, ki jih lahko rešujemo na opisani način.

Označimo z $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ položaj, ki ga zavzema material v danem referenčnem položaju in z Ω_i , $i = 1, 2$ njuni materialni fazi. Potem $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ in $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$. Privzeli bomo, da je Ω enostavno povezana množica, da je podobmočje Ω_1 strogo vsebovano v Ω in da je rob Γ_i med območjema odsekoma gladek. Območje Ω_1 tako predstavlja vključke, Ω_2 pa matriko. Nadalje bomo privzeli, da sta obe materialni fazi iz linearne elastičnega materiala. Za dani infinitezimalni deformacijski tenzor \underline{e} je napetostni tenzor \underline{t} dan s posplošenim Hookovim zakonom $\underline{t} = \underline{C} : \underline{e}$. Tu je \underline{C} elastični tenzor, ki je konstanten na vsaki fazi posebej. Ker bomo obravnavali nepopolno vez, dopuščamo, da je vektorsko polje pomikov \vec{u} na Γ_i nezvezno. V ta namen označimo z \vec{u}_i zožitev polja pomikov na Ω_i in ju razširimo zvezno na $\bar{\Omega}_i$, $i = 1, 2$. Na ta način dobimo vektorsko polje $[\vec{u}] = \vec{u}_2 - \vec{u}_1$ definirano na Γ_i .

Gibalne enačbe so posledica variacijskega principa. Potencialna energija U je dana z vsoto elastične energije in energije vezi med fazama:

$$U = U(\vec{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{e}(\vec{u}) : \underline{C} : \underline{e}(\vec{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{u} d\Omega - \int_{\Gamma_2} \vec{T}_2 \cdot \vec{u} d\Gamma + \Phi([\vec{u}]). \quad (1)$$

Tu je \vec{f} gostota volumenskih sil, Γ_2 je del roba območja Ω , kjer so predpisane napetosti $\vec{T} = \vec{T}_2$, $\Phi([\vec{u}])$ pa je energija vezi. Po zgoraj omenjeni linearizaciji smemo predpostaviti, da je Φ kvadratična funkcija skoka pomika na meji med vključki in matriko. Formalno lahko (1) prepišemo v

$$U(\vec{u}) = a(\vec{u}, \vec{u}) + g(\vec{u}), \quad (2)$$

kjer je $a(\bullet, \bullet)$ bilinearna, $b(\bullet)$ pa linearna forma na ustreznem vektorskem polju pomikov.

Dopustna množica je dana z $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$, kjer $\mathcal{V}_1 = \{\vec{u} : \vec{u}|_{\Gamma_1} = \vec{u}_1\}$ predpisuje robne pogoje na $\Gamma_1 = \partial\Omega \setminus \Gamma_2$, \mathcal{V}_2 pa vsebuje kinematične pogoje na stiku med fazama Γ_i . Medfazni stik Γ_i je sestavljen iz dveh delov, dela s popolnim stikom Γ_p in poškodovanega dela Γ_d ; $\bar{\Gamma}_i = \bar{\Gamma}_p \cup \bar{\Gamma}_d$. Na Γ_p je pomik zvezen, na Γ_d pa je nezvezen. Pomiki na Γ_d so omejeni z zahtevo, da sta materialni

fazi med seboj ločeni. Pri omejitvi na infinitezimalne pomike to pomeni, da na Γ_d velja pogoj

$$\int_{\Gamma_d} (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{n} \varphi d\Gamma \geq 0, \quad (3)$$

za vsak $\varphi \in L_+^2(\Gamma) = \{\varphi : \varphi \geq 0 \text{ in } \varphi \in L^2(\Gamma)\}$. V (3) je \vec{n} zunanja normala na $\partial\Omega_1$. Pripadajoča vez za virtualne pomike je

$$\int_{\Gamma_d} (\delta\vec{u}_2 - \delta\vec{u}_1) \cdot \vec{n} \varphi d\Gamma \geq 0. \quad (4)$$

Vzdolž Γ_p je stik med fazama popoln, pomik je zvezen in zato

$$\int_{\Gamma_p} (\delta\vec{u}_2 - \delta\vec{u}_1) \varphi d\Gamma = 0 \quad \text{za vsak } \varphi \in L^2(\Gamma). \quad (5)$$

Pogoja (4) in (5) določata virtualne pomike za dopustno množico \mathcal{V}' .

Iz pogoja stacionarnosti dobimo Caucyjevo momentno enačbo

$$\vec{0} = \vec{f} + \text{div } \mathbf{t} \quad \text{na } \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad (6)$$

robni pogoj $\mathbf{t}\vec{n} = \vec{T}_2$ na Γ_2 in pogoj

$$\int_{\Gamma_i} ((\vec{t}_1 - \text{grad } \Phi) \cdot \delta\vec{u}_1 + (-\vec{t}_2 + \text{grad } \Phi) \cdot \delta\vec{u}_2) d\Gamma \quad (7)$$

na medfaznem stiku. Tu smo s \vec{t}_i zapisali vektor napetosti na $\partial\Omega_i \cap \Gamma_i$ v smeri normale \vec{n} . Variaciji $\delta\vec{u}_1$ in $\delta\vec{u}_2$ v (7) vežeta pogoja (4) in (5) in sta neodvisni samo v primeru popolne izgube stika v normalni in tangentialni smeri. V tem primeru je

$$\vec{t}_1 = \vec{t}_2 = \text{grad } \Phi. \quad (8)$$

V primeru delne izgube stika variaciji nista neodvisni. Če je izguba stika samo v tangentialni smeri enotskega vektorja \vec{s} , je $(\delta\vec{u}_2 - \delta\vec{u}_1) \cdot \vec{a} = 0$ za vsak $\vec{a} \perp \vec{s}$ in tako

$$\vec{t}_1 \cdot \vec{a} = \vec{t}_2 \cdot \vec{a} \quad \forall \vec{a} \perp \vec{s} \quad \text{in} \quad \vec{t}_1 \cdot \vec{s} = \text{grad } \Phi \cdot \vec{s} = \vec{t}_2 \cdot \vec{s}. \quad (9)$$

Če ni stika samo v normalni smeri, je $(\delta\vec{u}_2 - \delta\vec{u}_1) \cdot \vec{a} = 0$ za vsak $\vec{a} \perp \vec{n}$ in

$$\vec{t}_1 \cdot \vec{a} = \vec{t}_2 \cdot \vec{a} \quad \forall \vec{a} \perp \vec{n} \quad \text{in} \quad \vec{t}_1 \cdot \vec{n} = \vec{t}_2 \cdot \vec{n} = \text{grad } \Phi \cdot \vec{n} - \lambda, \quad (10)$$

kjer je $\lambda \geq 0$ Lagrangeev množitelj iz Karush-Kuhn-Tuckerjevega pogoja za vez (4). V primeru, če ta vez ni aktivna, sta variaciji v normalni smeri neodvisni in je $\lambda = 0$. Mehanski pomen pozitivne vrednosti množitelja je kompresijska napetost na medmaterialnem stiku, ki preprečuje prekrivanje materialnih faz. V primeru izgube stika v normalni in tangentialni smeri in aktivnemu pogoju (4) pa velja

$$\vec{t}_1 = \vec{t}_2 = \text{grad } \Phi - \lambda \vec{n}. \quad (11)$$

3 Diskretizacija

V tem razdelku bomo opisali večnivojsko diskretizacijo. Prvi nivo aproksimacije je aproksimacija na mikro ravni, kjer je njena velikost prilagojena mikrogeometriji problema. Velikost zadnjega, končnega nivoja aproksimacije, pa je enaka velikosti, ki zagotavlja zahtevano natančnost aproksimacije rešitve. Bistven korak pri večnivojski diskretizaciji je prehod iz enega nivoja diskretizacije na sosednji višji nivo. Oglejmo si ta prehod iz prvega na drugi nivo.

3.1 Diskretizacija na prvem nivoju

Vključku $\Omega_1^j \subset \Omega_1$ priredimo priredimo del matrike $\Omega_m^j \subset \Omega_2$ tako, da je njuna unija $\Omega_j^{(1)}$ povezana množica in jo diskretiziramo na končne elemente na standardni način. Pripadajoči prostor končnih elementov označimo z $\mathcal{F}_j^{(1)} = (\mathcal{N}_j^{(1)}, \mathcal{U}_j^{(1)}, \mathcal{M}_j^{(1)})$, kjer je $\mathcal{N}_j^{(1)}$ množica vozlišč končnih elementov, $\mathcal{U}_j^{(1)} = \{\vec{u}_{j,k}^{(1)}\}_{k=1,\dots,m_j^{(1)}}$ množica vektorskih prostostnih stopenj, tu je $m_j^{(1)}$ število prostostnih stopenj, in

$$\mathcal{M}_j^{(1)} = \{\vec{M}_{j,k,i}^{(1)}, k = 1, \dots, m_j^{(1)}, i = 1, \dots, d\} = \{\vec{M}_{j,r}^{(1)}, r = 1, \dots, dm_j^{(1)}\}$$

množica vektorskih baznih funkcij. Omejili se bomo na Lagrangeeve končne elemente. Poljubni pomik na $\mathcal{F}_j^{(1)}$ je dan z

$$\vec{u} = \left(\vec{u}_{j,k}^{(1)} \cdot \vec{e}_i \right) \vec{M}_{j,k,i}^{(1)} \quad (12)$$

kjer so \vec{e}_i , $i = 1, \dots, d$ kartezični bazni vektorji prostora \mathbb{R}^d . V (12) smo uporabili sumacijski dogovor po indeksih k in i po njunih domenah. Sumacijski dogovor po ponavljajočih indeksih bo veljal tudi v nadaljevanju. Če so komponente vektorskih baznih funkcij enake, torej če je $\vec{M}_{j,k,i}^{(1)} = M_{j,k}^{(1)} \vec{e}_i$, se (12) poenostavi v $\vec{u} = \vec{u}_{j,k} M_{j,k}^{(1)}$. Pri diskretiziranju na končne elemente na standardni način so komponente vektorskih baznih funkcij enake, zato na prvem nivoju diskretizacije velja ta zveza, na naslednjih nivojih pa niso enake, zato tam velja enakost oblike (12).

Zožitev energijskega funkcionala (1) na prostor končnih elementov $\mathcal{F}_j^{(1)}$ označimo z $U_j^{(1)}$. Če združimo prostostne stopnje pomikov $\mathcal{U}_j^{(1)}$ v stolpec $\mathbf{u}^{(1)} \in \mathbb{R}^{dm_j^{(1)}}$ ima $U_j^{(1)}$ obliko

$$U_j^{(1)} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{(1)} \cdot \mathbf{H}^{(1)} \cdot \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{g}^{(1)} \cdot \mathbf{u}^{(1)} + f_0^{(1)}, \quad (13)$$

kjer je $\mathbf{H}^{(1)}$ togostna simetrična matrika, $\mathbf{g}^{(1)}$ ustrezen stolpec in $f_0^{(1)} \in \mathbb{R}$. Vodilni kvadratični člen funkcionala označimo z $\hat{U}_j^{(1)}$. Komponente togostne matrike so $H_{rs}^{(1)} = a(\vec{M}_{j,r}^{(1)}, \vec{M}_{j,s}^{(1)})$, stolpca $\mathbf{g}^{(1)}$ pa $g_r = g(\vec{M}_{j,r}^{(1)})$. Enostranskemu robnemu pogoju (3) pripada diskretizacija

$$\mathbf{C}_j \cdot \mathbf{u}^{(1)} \geq \mathbf{0}. \quad (14)$$

Tu je \mathbf{C}_j matrika dimenzije $d_j \times dm_j^{(1)}$, kjer je d_j število vozlov na robu vključka v katerih je izgubljen stik v normalni smeri.

Množico vozlov končnih elementov na robu območja $\Omega_j^{(1)}$ označimo z $\hat{\mathcal{N}}_j^{(1)}$, njihovo število pa z $\hat{m}_j^{(1)}$. Množici $\hat{\mathcal{N}}_j^{(1)}$ priredimo diskretne karakteristične funkcije $\chi_k^{(1)}$, $k = 1, \dots, \hat{m}_j^{(1)}$ z lastnostjo, da je $\chi_k^{(1)}$ enaka nič na $\hat{\mathcal{N}}_j^{(1)}$ povsod razen v izbranem k -tem vozlu, kjer ima vrednost 1. Sedaj definiramo na $\partial\Omega_j^{(1)}$ osnovne robne pomike $\vec{b}_{k,i}^{(1)} = \chi_k^{(1)} \vec{e}_i$. Tem osnovnim robnim pomikom priredimo pomožne bazne funkcije $\vec{N}_{k,i}^{(2+)}$, ki pri danih robnih vrednostih $\vec{b}_{k,i}^{(1)}$ in enostranskemu pogoju (14) minimizirajo funkcional $\hat{U}_j^{(1)}$ na $\mathcal{F}_j^{(1)}$. Linearna kombinacija pomožnih baznih funkcij z nenegativnimi koeficienti zadošča enostranskim robnim pogojem, v splošnem, kjer nastopajo tudi negativni koeficienti pa ne, zato množico pomožnih baznih funkcij dopolnimo še s funkcijami $\vec{N}_{k,i}^{(2-)}$, ki pri robnih vrednostih $-\vec{b}_{k,i}^{(1)}$ in pogoju (14) minimizirajo $\hat{U}_j^{(1)}$. Tej množici dodamo še funkcijo $\vec{M}_0^{(2)}$ z ničelno sledjo na $\partial\Omega_j^{(1)}$, ki pri pogoju (14) minimizira celotni funkcional (13). Unijo vseh teh pomožnih baznih funkcij označimo z $\hat{\mathcal{M}}_j^{(2)}$. Linearna kombinacija funkcij $\vec{N}_{k,i}^{(2\pm)}$ z nenegativnimi koeficienti zadošča enostranskim robnim pogojem in hkrati interpolira poljubne robne vrednosti funkcij izbranega prostora končnih elementov $\mathcal{F}_j^{(1)}$. Pri teh robnih vrednostih vsota te linearne kombinacije in funkcije $\vec{M}_0^{(2)}$ minimizira pri pogoju (14) energijski funkcional $U_j^{(1)}$ na $\mathcal{F}_j^{(1)}$. Res, ker $\vec{M}_0^{(2)}$ minimizira $U_j^{(1)}$ obstaja stolpec nenegativnih Lagrangevih množiteljev $\boldsymbol{\lambda}_0^{(2)} \in \mathbb{R}^{d_j}$ tako, da je

$$a(\vec{M}_0^{(2)}, \vec{M}_r) + g(\vec{M}_r) = \boldsymbol{\lambda}_0^{(2)} \cdot \mathbf{C}(\vec{M}_r) \quad (15)$$

za vsak $\vec{M}_r \in \mathcal{M}_j^{(1)}$. Podobno je

$$a(\vec{N}_{k,i}^{(2\pm)}, \vec{M}_r) = \boldsymbol{\lambda}_{k,i}^{(2)} \cdot \mathbf{C}(\vec{M}_r) \quad (16)$$

za vsak $\vec{M}_r \in \mathcal{M}_{j,0}^{(1)}$, kjer je $\mathcal{M}_{j,0}^{(1)}$ podprostor baznih funkcij z ničelnimi vrednostmi na robu območja $\Omega_j^{(1)}$ in $\boldsymbol{\lambda}_{k,i}^{(2)} \geq \vec{0}$. Če pomnožimo (16) z nenegativnimi koeficienti linearne kombinacije robnih vrednosti in prištejemo (15) dobimo Karush-Kuhn-Tuckerjev pogoj, ki je pri predpostavki, da je forma $a(\bullet, \bullet)$ pozitivno definitna zadosten pogoj, da ta vsota minimizira energijski funkcional.

V primeru aktivnih vezi enostranskih robnih pogojev so funkcije $\vec{N}_{k,i}^{(2+)}$ in $\vec{N}_{k,i}^{(2-)}$ med seboj linearno neodvisne. Če je vez med vključkom in matriko popolna, potem ni vezi in v tem primeru $\vec{N}_{k,i}^{(2-)} = -\vec{N}_{k,i}^{(2+)}$. Navkljub temu pa zaradi enotne oblike tudi v tem primeru v definicijo pomožnih baznih funkcij $\hat{\mathcal{M}}_j^{(2)}$ vključimo obe množici funkcij. Na ta način izgubimo enoličnost rešljivosti na naslednjem nivoju, vendar, po naših numeričnih izkušnjah, za dober optimizacijski algoritem to nima pomembnejšega vpliva na učinkovitost iskanja lokalnega optimuma.

3.2 Diskretizacija na drugem nivoju

Izberimo indekse j množic $\Omega_j^{(1)}$ tako, da je zaprtje unije teh množic povezana množica. Označimo jo z $\Omega_{j'}^{(2)}$. Potem $\bar{\Omega}_{j'}^{(2)} = \cup_{j=1}^{j'} \bar{\Omega}_j^{(1)}$. Vozli diskretizacije $\mathcal{N}_{j'}^{(2)}$ območja $\Omega_{j'}^{(2)}$ so sedaj

točke na množicah $\partial\Omega_j^{(1)}$. V najenostavnejšem primeru, ko vozli sosednjih območij $\Omega_j^{(1)}$ sovpadajo, lahko za vozle diskretizacije $\Omega_{j'}^{(2)}$ vzamemo kar unijo množic $\hat{\mathcal{N}}_j^{(1)}$. V tem primeru so bazne funkcije diskretizacije drugega nivoja dane s funkcijami $\hat{\mathcal{M}}_j^{(2)}$. Pomanjkljivost te poenostavitve pa je, da je potem velikost diskretizacije na drugem nivoju enaka velikosti na prvem nivoju in je potemtakem pri večjem številu vključkov po nepotrebnem preveč drobna. Zato tudi v tem posebnem primeru praviloma postopamo kot v splošnem primeru, ko diskretizacije prvega nivoja na sosednjih $\Omega_j^{(1)}$ niso kompatibilne. V tem primeru vozle $\mathcal{N}_{j'}^{(2)}$ diskretizacije $\Omega_{j'}^{(2)}$ izberemo tako, da lahko zožitev na $\partial\Omega_j^{(1)}$ vsake njihove karakteristične funkcije zapišemo kot linearno kombinacijo funkcij $\chi_k^{(1)}$, ki pripadajo diskretizaciji $\hat{\mathcal{N}}_j^{(1)}$. Pri istem polinomskem redu baznih funkcij obeh nivojev to pomeni, da za vsak j število vozlov diskretizacije $\mathcal{N}_{j'}^{(2)}$ na $\partial\Omega_j^{(1)}$ ne presega števila vozlov diskretizacije $\hat{\mathcal{N}}_j^{(1)}$. Nove vozle na $\partial\Omega_j^{(1)}$ praviloma izberemo ekvidistančno, njihovo število $\hat{m}_j^{(2)}$ pa je primerni del števila $\hat{m}_j^{(1)}$. Konkretno, za $\Omega_{j'}^{(2)}$, ki je približno v vseh smereh enake velikosti, je primerna vrednost za $\hat{m}_j^{(2)}$ enaka celemu delu števila $\max\{m_0, \hat{m}_j^{(1)}/J'^{1/d}\}$, kjer je m_0 minimalno zahtevano število vozlov na $\partial\Omega_j^{(1)}$.

Bazne funkcije drugega nivoja aproksimacije so tako v splošnem primeru dane z linearno kombinacijo s pozitivnimi koeficienti funkcij $\vec{N}_j^{(2)}$. Konkretno, naj bo zožitev karakteristične funkcije $\chi_l^{(2)}$ vozla $P_l \in \mathcal{N}_{j'}^{(2)}$ na $\partial\Omega_j^{(1)}$ dana z linearno kombinacijo $a_{k'}\chi_{k'}^{(1)} + a_{k''}\chi_{k''}^{(1)}$, kjer so koeficienti $a_{k'}$ pozitivni, $a_{k''}$ pa negativni. Potem so zožitve na $\Omega_j^{(1)}$ pripadajočih baznih funkcij $\vec{M}_{l,i}^{(2+)}$ vozla P_l dane z linearno kombinacijo $a_{k'}\vec{N}_{k',i}^{(2+)} - a_{k''}\vec{N}_{k'',i}^{(2-)}$. Vozlu P_l priredimo še bazno funkcijo $\vec{M}_{l,i}^{(2-)} = a_{k'}\vec{N}_{k',i}^{(2-)} - a_{k''}\vec{N}_{k'',i}^{(2+)}$, ki ima v vozlu P_l vrednost -1 . Po konstrukciji so bazne funkcije diskretizacije drugega nivoja pokorne enostranskemu robnemu pogoju. Unijo baznih funkcij $\vec{M}_{l,i}^{(2\pm)}$ po vseh vozlih P_l diskretizacije $\mathcal{N}_{j'}^{(2)}$ in funkcije $\vec{M}_0^{(2)}$ označimo z $\mathcal{M}_{j'}^{(2)}$. Prostor končnih elementov diskretizacije na drugem nivoju je tako $\mathcal{F}_{j'}^{(2)} = (\mathcal{N}_{j'}^{(2)}, \mathcal{U}_{j'}^{(2)}, \mathcal{M}_{j'}^{(2)})$. Pripadajoči končni elementi so množice $\Omega_j^{(1)}$, ki tvorijo $\Omega_j^{(2)}$.

Prostostne stopnje pomikov $\mathcal{U}_{j'}^{(2)}$ združimo v stolpec $\mathbf{u}^{(2)} \in \mathbb{R}^{dm_j^{(2)}}$. Zožitev energijskega funkcionala na $\mathcal{F}_{j'}^{(2)}$ je potem oblike

$$U_{j'}^{(2)} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{(2)} \cdot \mathbf{H}^{(2)} \cdot \mathbf{u}^{(2)} + \mathbf{g}^{(2)} \cdot \mathbf{u}^{(2)} + f_0^{(2)}, \quad (17)$$

pripadajoči enostranski robni pogoj pa je sedaj

$$\mathbf{u}^{(2)} \geq \mathbf{0}. \quad (18)$$

Vodilni kvadratni del funkcionala označimo s $\hat{U}_j^{(2)}$. Zožitev bazne funkcije $\vec{M}_r^{(2)} \in \mathcal{M}_{j'}^{(2)}$ na množico $\Omega_j^{(1)}$ je dana z $\vec{M}_r^{(2)} = u_{r,j,k}^{(1)} \vec{M}_{j,k}^{(1)}$, brez sumacije po j . Od tod sledi, da je prispevek elementa $\Omega_j^{(1)}$ togostni matriki $\mathbf{H}^{(2)}$ enak

$$H_{rs}^{(2)} = u_{r,j,k}^{(1)} u_{s,j,l}^{(1)} H_{j,kl}^{(1)}. \quad (19)$$

Vidimo, da togostno matriko diskretizacije na drugem nivoju sestavimo za metodo končnih elementov značilen način, element po elementu. Podobno velja $g_r^{(2)} = u_{r,j,k}^{(1)} g_k^{(1)}$.

Sedaj moramo definirati še pomožne bazne funkcije $\tilde{N}_{k,i}^{(3\pm)}$, s pomočjo katerih potem na naslednjem nivoju konstruiramo bazne funkcije prostora $\mathcal{F}^{(3)}$. Množico vozlov diskretizacije drugega nivoja na robu območja $\Omega_j^{(2)}$ označimo z $\hat{\mathcal{N}}_j^{(2)}$. Podobno kot prej priredimo sedaj tem vozlom karakteristične funkcije $\chi_k^{(2)}$ in robne pomike $\vec{b}_{k,i}^{(2)} = \chi_k^{(2)} \vec{e}_i$ in označimo z $\tilde{N}_{k,i}^{(3+)}$ funkcijo, ki minimizira $\hat{U}_j^{(2)}$ pri pogoju (18). Nato prav tako kot na prvem nivoju definiramo še funkcije $\tilde{N}_{k,i}^{(3-)}$ in sestavimo množico $\hat{\mathcal{M}}_j^{(3)}$, ki ji dodamo še funkcijo $\vec{M}_0^{(3)}$, ki minimizira (17) pri pogoju (18) in ničelnih robnih vrednostih. Po konstrukciji tako definirane funkcije zadoščajo enostranskim robnim pogojem na robovih vključkov. Podobno kot prej tudi sedaj vsota funkcije $\vec{M}_0^{(3)}$ in linearne kombinacije s pozitivnimi koeficienti funkcij $\tilde{N}_{k,i}^{(3\pm)}$ minimizira (17) pri pogoju (18).

3.3 Diskretizacije na naslednjih nivojih

Diskretizacije na naslednjih nivojih nadaljujemo po istem postopku, kakor smo prišli od prvega na drugi nivo. Pri konstrukciji baznih funkcij pri tem upoštevamo enostranski robni pogoj oblike (18). Na zadnjem L -tem nivoju konstrukcija baznih funkcij ni potrebna. Tam minimiziramo $U^{(L)}$ pri diskretiziranih robnih pogojih \mathcal{V}_1 in enostavnih enostranskih pogojih oblike (18). Tako dobimo rešitev na zadnjem oziroma makro nivoju. Rešitev na L -tem nivoju določa prave robne vrednosti na robovih pripadajočih končnih elementov. Rešitev znotraj elementov, ki je rešitev na $L - 1$ nivoju, je potem dana s pripadajočo linearno kombinacijo funkcij $\mathcal{M}^{(L-1)}$. Na ta način lahko rekonstruiramo rešitev vse do prvega oziroma mikro nivoja. Pri tej rekonstrukciji uporabimo že izračunane koeficiente, ki povezujejo bazne funkcije med nivoji diskretizacije. Natančnost aproksimacije je enaka natančnosti aproksimacije na makro nivoju.

4 Zaključne opombe

4.1 Enostranski robni pogoj

Najenostavnejša diskretizacija enostranskega robnega pogoja (4) je kolokacija. Naj bo P_k vozle končnih elementov na robu vključka Γ_i , \vec{n} zunanja normala na Γ_i v P_k in \vec{t}_i , $i = 1, d - 1$ pripadajoča linearno neodvisna tangenta vektorja. Vozlu P_k priredimo enostranske vezi

$$C_{k,0}^l \leq (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{n} \leq C_{k,0}^u \quad \text{in} \quad C_{k,i}^l \leq (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{t}_i \leq C_{k,i}^u. \quad (20)$$

Če je vez v normalni smeri popolna, potem postavimo v $C_{k,0}^l = C_{k,0}^u$. Podobno velja tudi v tangentni smeri. V primeru izgube stika v normalni smeri pa postavimo $C_{k,0}^l = 0$ in $C_{k,0}^u = \infty$, za izgubo stika v tangentni smeri pa $C_{k,i}^l = C_{k,i}^u = \infty$. Na ta način lahko v deformacijskem procesu, ko se tokom deformacije status izgube stika spreminja, le tega kontroliramo z vrednostmi spodnjih in zgornjih mej $C_{k,i}^l$ in $C_{k,i}^u$. Pri tem pristopu imajo vsi mikro problemi tokom deformacije enako strukturo. Na tak način povečano število vezi ne predstavlja problema, saj dobri optimizacijski algoritmi v pred optimizacijski fazi enakosti med zgornjimi in spodnjimi mejami prepoznajo kot enakost $\vec{u}_2 = \vec{u}_1$ in jo potem tudi eliminirajo.

4.2 Računska učinkovitost

Število računskih operacij optimizacijskega algoritma z enostranskimi vezmi je bistveno odvisno od števila aktivnih vezi, zato njegova točna teoretična ocena ni znana. Približna ocena je sorazmerna številu operacij potrebnih za rešitev pripadajočega linearnega sistema. Pri metodah iskanja aktivnih vezi je faktor sorazmernosti odvisen od števila poskusov v katerih najdemo vse aktivne vezi. Pri vsaki ponovitvi iskanja aktivnih vezi že faktoriziran linearni sistem le delno na novo faktoriziramo, kar računsko ni zahtevno. Problem je, da število poskusov iskanja aktivnih vezi raste ekponentno hitro s številom vezi. To pomeni, da je namesto ene optimizacijske naloge z velikim številom vezi bolje reševati več optimizacijskih nalog z manjšim številom vezi in natanko to je tudi osnovna ideja predstavljene metode. Zavedati pa se moramo, da sedaj rešujemo na vsakem nivoju diskretizacije optimizacijske naloge z enostavnimi enostranskimi pogoji za številne robne pogoje, tako da je skupno število optimizacijskih nalog bistveno večje. Z numeričnimi računi na konkretnih primerih bomo v prihodnosti poskusili ugotoviti, koliko z večnivojsko metodo dejansko pridobimo.

4.3 Popolna izguba stika

O popolni izgubi stika govorimo, ko je za vse vključke $\Gamma_i = \Gamma_d$. Primer postane posebno zahteven, če po polni izgubi stika ni več interakcije med matriko in vključki, torej če je energija vezi $\Phi = 0$. V tem primeru izgubimo pozitivno definitnost energijske forme $a(\bullet, \bullet)$ in matrike $\mathbf{H}^{(k)}$ izgubijo pozitivno definitnost in optimizacijski problemi na prvem mikro nivoju postanejo NP-težki. Z dodatnimi robnimi pogoji, ki preprečujejo translacijo in infinitezimalno rotacijo vključkov v kontaktnih točkah lahko nalogo regulariziramo, vendar za poljubne makro robne pogoje in splošno geometrijo vključkov položaj kontaktnih točk ni znan v naprej. Tudi v primeru, ko jih poznamo, naloga ostaja numerično zahtevna saj numerično izračunane kontaktne napetosti na robu vključka, ki ni v stiku z matriko, zaradi numerične napake niso natanko enake nič. To pri velikih pomikih in vključku z majhno podajnostnjo glede na matriko povzroči opazno nepravilno izračunane deformacije.

Literatura

- [1] G. Mejak, *Imperfect bonding with nonpenetration condition*, v KLEPACZKO, Janusz R. (ur.): *Advances in constitutive relations applied in computer codes*, (CISM courses and lectures, no. 515), Springer, 203–260, 2009.
- [2] G. Mejak, *Model časovno odvisne nepopolne vezi med fazama elastičnega kompozitnega materiala*, v KORELC, Jože in ZUPAN, Dejan (ur.): *Kuhljevi dnevi 2006*, Zbornik del, Ljubljana, SDM, 173–180, 2006.
- [3] G. Mejak, *Three level finite element method*, 8th World Congress on Computational Mechanics WCCM8, Venice, Italy, 30 June-4 July 2008.



Mehanizem generiranja vrtničnih struktur obtekanja kaskade valjev

M. Milavec¹, B. Širok², M. Hočevar² in M. Eberlinc²

Mechanism of vortex generation behind the cylinder cascade

Povzetek. Zaščitna mreža aksialnih ventilatorjev predstavlja enega od pomembnih generatorjev hrupa in je povezana z disipacijo kinetične energije toka na izstopu iz ventilatorja. V okviru raziskav tokovnih razmer v zaščitni mreži je bila izvedena študija obtekanja kaskade valjev v zračnem toku. Izvedena je bila vizualizacija tokovnih struktur, meritve hrupa v oddaljenem polju in simulacija z numeričnim modelom LES. Namen študije je bil na preprostem primeru ovrednotiti in ugotoviti možnosti raziskave turbulentnih pojavov z uporabljenimi orodji in razčleniti medsebojno povezanost ter ujemanje med dobljenimi rezultati.

Abstract. The fan guard grill is one of the most important components, contributing to the increased sound power level and consequently to the dissipation of fluid kinetic energy behind fan outlet boundary region. Investigation of air flow around cascade of cylinder was analyzed. Experimental method using visualization, measurements of sound power levels in the far field region and LES numerical simulation of air flow around cylinders was performed. The purpose of investigation was, where using a simple test, to find out the possibility and limitations of mentioned techniques and there comparisons of the analyzed results.

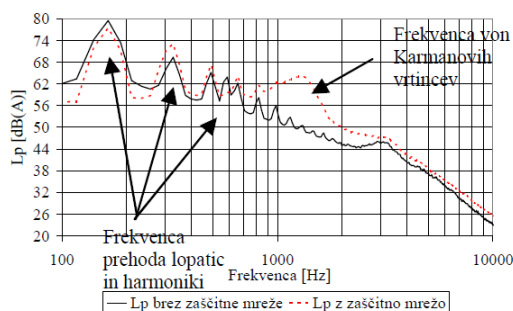
1 Uvod

V predhodni študiji [1] zaščitne mreže aksialnega ventilatorja na integralno aero-dinamsko in zvočno karakteristiko je bil ugotovljen vpliv zaščitne mreže na delovanje aksialnega ventilatorja. Vpliv mreže na zmanjšanje učinkovitosti ventilatorja in povečanje izsevane zvočne moči je bil raziskan na primeru aksialnega ventilatorja premera 500 mm. Izvedena je bila primerjalna študija s pripadajočo zaščitno mrežo in brez nje. Ugotovljeno je bilo, da zaščitna mreža povzroči padec delovne sposobnosti, zmanjšanje izkoristka za 16 % in povečano generacijo hrupa za 4 dB.

¹ Hidria Inštitut Klima d.o.o.

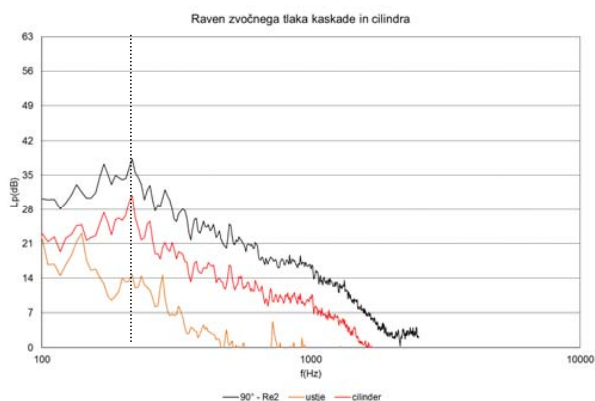
² Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

Na podlagi izmerjenega frekvenčnega spektra zvočne moči lahko v primeru obratovanja ventilatorja z zaščitno mrežo sklepamo na povečano zvočno moč v območju frekvenc med 800 Hz in 2000 Hz, ki jo prikazuje slika 1. Razpotegnjena oblika zvočnega spektra navaja na povečano intenzivnost hitrostnih fluktuacij v področju turbulentne generacije vrtničnih struktur Karmanove steze. Pojav je predstavljen v prispevku Alič s soavtorji [1], analiziran na primeru kaskade valjev v uniformnem zračnem toku pri različnih kotih kaskade in različnih Re številih. Rezultati meritev nivoja zvočnega tlaka so prikazani na sliki 2.



Slika 1: Izmerjena raven zvočnega tlaka ventilatorja z (rdeča prekinjena krivulja) in brez zaščitne mreže (črna krivulja) [1].

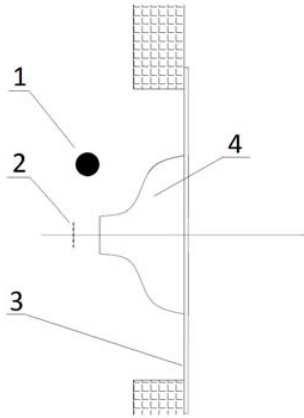
Na sliki 2 so razvidne značilne razlike med generiranim hrupom ozadja (slika 2, rumena krivulja), hrupom na osamljenem cilindru (slika 2, rdeča krivulja) in hrupom na kaskadi cilindrov v zračnem toku (slika 2, črna krivulja). Izsevani hrup na cilindru in kaskadi je značilno večji od hrupa ozadja. Razlika med cilindrom in kaskado pa se odraža v povečani zvočni moči in neznatni obliki spektra v področju Karmanove vrtnične steze, označeno z črtkano črto na sliki 2. V prispevku želimo predstaviti aerodinamske karakteristike toka za kaskado cilindrov (slika 2, črna krivulja) in na osnovi tega oceniti predstavljene razlike v spektrih izsevane zvočne moči.



Slika 2: Raven zvočnega tlaka kaskade (črna krivulja), cilindra (rdeča krivulja) in hrupa ozadja (rumena krivulja) [1].

2 Eksperimentalno delo

Eksperimentalne raziskave so temeljile na vizualizaciji tokovnega polja na kaskadi 5 valjev premera 8 mm (slika 3). Kaskada se lahko vrti okrog osi sredinske palice. Premer palic v kaskadi je za potrebe eksperimentalnega dela večji (8 mm), kot v primeru zaščitne mreže aksialnega ventilatorja (5 mm) [1]. S povečevanjem premera obtekajočega valja se frekvenca tvorjenja vrtincev za valjem zmanjša in tako omogoča lažje opazovanje vrtinčnih struktur.



Slika 3: Shematična postavitve eksperimenta (1 – hitra kamera, 2 – kaskada valjev, 3 – stena odmevnice, 4 – ustje).

Frekvenca tvorjenja Karmanovih struktur je odvisna od kinematične viskoznosti medija, od hitrostnih razmer ter premera obtekajočega cilindra. Značilna frekvenca vrtinčnih struktur pri obtekanju cilindra je podana z enačbama 1 in 2 [2]:

$$f_{karman} = 0,195v \frac{1}{d_{valja}} \left(1 - \frac{20,1}{Re} \right), \quad (1)$$

$$Re = \frac{vd_{valja}}{\nu} \quad (2)$$

kjer je v hitrost, ν kinematična viskoznost zraka, d_{valja} premer valja in Re Reynoldsovo število. V primeru toka skozi kaskade valjev, pa se zaradi periodične postavitve valjev, ki zmanjšujejo prosto pretočno polje spremenijo, kar upoštevamo s korekcijo v enačbi 3:

$$f_{karman,k} = 0,195v_k \frac{1}{d_{valja}} \left(1 - \frac{20,1}{Re_k} \right), \quad (3)$$

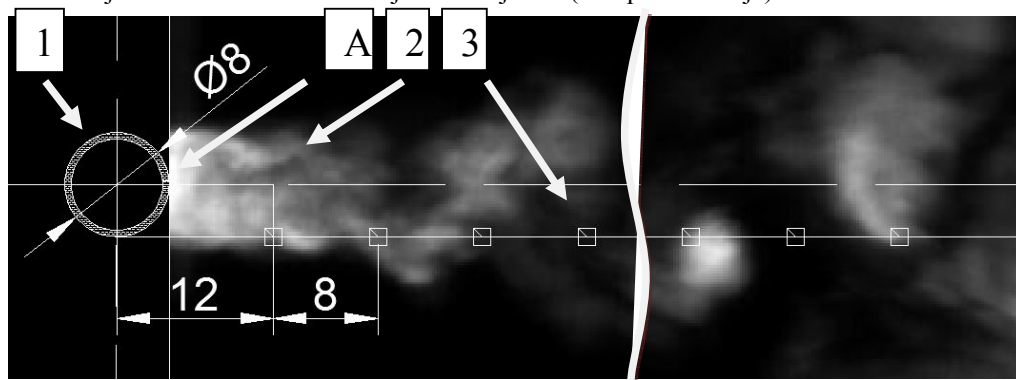
kjer indeks k predstavlja razmere znotraj kaskade, za katere je značilna povečana lokalna hitrost toka. V nadaljevanju prispevka so rezultati predstavljeni primerjalno med eksperimentalnim delom z uporabo vizualizacije in numeričnim modelom, v delovni točki pri naklonskem kotu kaskade valjev 90° (slika 3) in Re 4025.

2.1 Vizualizacija kaskade valjev

Vizualizacija in vse ostale predhodne integralne, lokalne in meritve nivoja zvočnega tlaka [1], so bile izvedene v laboratoriju Hidrie Inštituta Klime, Godovič. Zaradi ponovljivosti in primerljivosti različnih meritev je bila postavitve in montaža kaskade enaka kot pri meritvah hitrosti z anemometrom na vročo žičko [1], meritvah ravni zvočnega tlaka [1] in vizualizacije vrtničnih struktur za kaskado. Shema vizualizacije kaskade je bila prikazana na Slika 3.

Kaskada je bila pritrjena na ustje (slika 3, točka 4), ta pa na ploščo na steni odmevnice (slika 3, točka 3). Kaskada je bila sestavljena iz petih vzporednih cilindrov, postavljenih v eno ravnino (slika 3, točka 2). Razdalja med osmi cilindrov je znašala štirikratni premer cilindrov (32 mm). Razdalja je enaka razmerju med razmiki koncentričnih zaščitnih žičk in njihovim premerom na ventilatorjih [1]. Dolžina cilindrov je bila enaka dvema širinama izstopnega ustja, ter na obeh koncih spojena skupaj s povezovalnimi konzolami kaskade, ki je omogočala zasuk kaskade. Razmerje dolžine cilindrov kaskade v tokovnem polju z njihovim premerom l_{cil}/d_{cil} je bilo 12,5. Takšno razmerje je značilno večje od priporočljivega minimalnega razmerja 3,5 [3], pri katerem je dopustna predpostavka tvorjenja vrtnične steze med cilindrom končne dolžine in cilindrom t.i. neskončne dolžine.

Na Slika 4 je prikazan cylinder v kaskadi (slika 4, točka 1). Opazovani dimni polutant (slika 4, točka 2) na posnetku je simuliran s pomočjo uparjenega parafinskega olja na uporovni žici, ki je bila segreta z električnim grelcem. Žica je bila postavljena v notranjost posameznega cilindra. Izstop dimnega polutanta v mejno plast zračnega toka je bil izveden skozi izvrtane luknjice premera 1 mm (slika 4, položaj A). S kvadratkami (slika 4, točka 3), velikosti 5×5 elementov slik (*ang.* pixel) so označena merilna mesta, kjer so bila v nadaljevanju pri postopku obdelave sekvenc digitalnih posnetkov analizirane stopnje sivin. Izbranih je bilo 15 oken z medsebojno razdaljo 1D (D = premer valja).



Slika 4: Obtekaajoči cylinder znotraj kaskade. S kvadrati so označena mesta zajemov signalov.

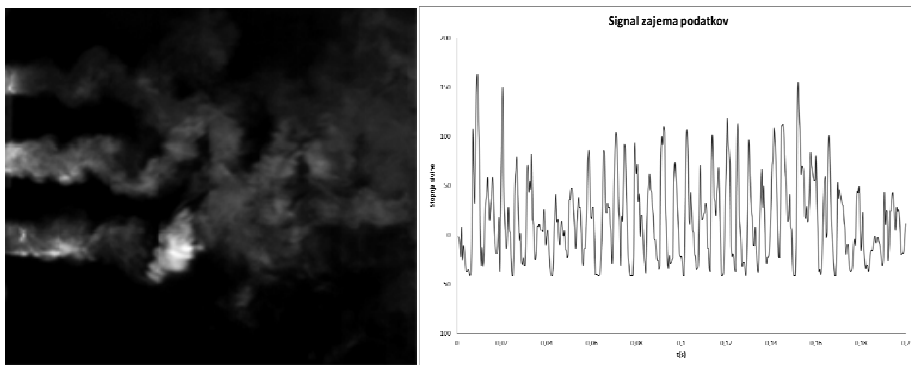
Predpostavljeno je bilo, da so vrednosti skalarne polja sivin sorazmerne deležu polutanta v opazovanem oknu, in da so fluktuacije koncentracije polutanta odnosno sivine proporcionalne hitrostnim fluktuacijam:

$$A \propto N. \quad (4)$$

Simbol A predstavlja opazovano spremenljivko intenzitete sivine v aktivnem oknu, N pa koncentracijo poluta v opazovanem področju. Spremenljivka A je celoštevilčne vrednosti v območju od 0 do 255, ki se za dano okno določeno s koordinatama (x, y) spreminja s časom. Relacija med sivino in deležem polutanta je podana z:

$$A(x, y, t) = \frac{1}{N^2} \sum_i \sum_j E(x + i, y + j, t), \quad (5)$$

kjer je $E(i, j)$ celoštevilčna vrednost sivine elementov slik v aktivnem oknu [4]. Značilna časovna vrsta za primer delovne točke pri Re 4025 je za merilno točko v oknu 5 (slika 4, peto okno iz leve proti desni) predstavljena na sliki 5. Signale se je nato s pomočjo FFT algoritmov pretvorilo v frekvenčni prostor, kjer je prikazana vrednost stopnje sivine v odvisnosti od frekvence. Zajem digitalnih posnetkov (slika 3, točka 1) je bil izveden s frekvenco 2,4 kHz, kar dopušča analiziranje frekvenčnega spektra do frekvenčnega območja 1,2 kHz. Obdelava slik in zajem signalov je bil izveden s pomočjo računalniškega programa Dynascan, izračun frekvenčnih spektrov pa je bil izveden v okolju Matlab.



Slika 5: Slika levo predstavlja dimni polutant za kaskado valjev, slika desno pa signal stopnje sivine v odvisnosti od časovnega koraka.

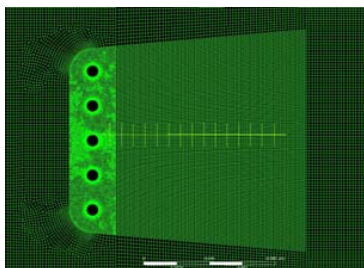
Predstavljena vizualizacija obtekanja dimnega polutanta za kaskado podaja informacijo o fluktuaciji skalarne polja sivine. Ker je opazovani pojav prostorski, so prisotne določene omejitve pri uporabi vizualizacijske metode. Zato je analiziranje vrtinčnih struktur oteženo. Ravno tako nam vizualizacija ne poda podrobnejših informacij o tlačnem in hitrostnem polju. Zato je bila narejena numerična simulacija, ki je predstavljena v nadaljevanju tega prispevka.

3 Numerična simulacija

V okviru študije interakcije vrtinčnih struktur je bila narejena numerična simulacija z LES (*ang.* Large Eddy Simulation) – Smagorinsky [5], s katero so bili dobljeni rezultati o fluktuaciji polja hitrosti in podrobnejšo analizo obravnavanega dela, predstavljenega v tem prispevku. Numerični model LES je bil izbran, ker je opazovan nestacionaren razpad vrtinčnih struktur in njihova medsebojna interakcija. Izračun je bil izveden v programskem paketu ANSYS CFX.

Preizkušeni sta bili dve gostoti mreže z (i) $2,3 \times 10^6$ in (ii) $5,07 \times 10^6$ elementov ter trije različni časovni koraki. Ugotovljeno je bilo, da izbrani gostoti in obliki mreže ne vplivata na rezultat izračuna porazdelitve fluktuacij frekvenc, s tem je bil eliminiran vpliv mreže na rezultat

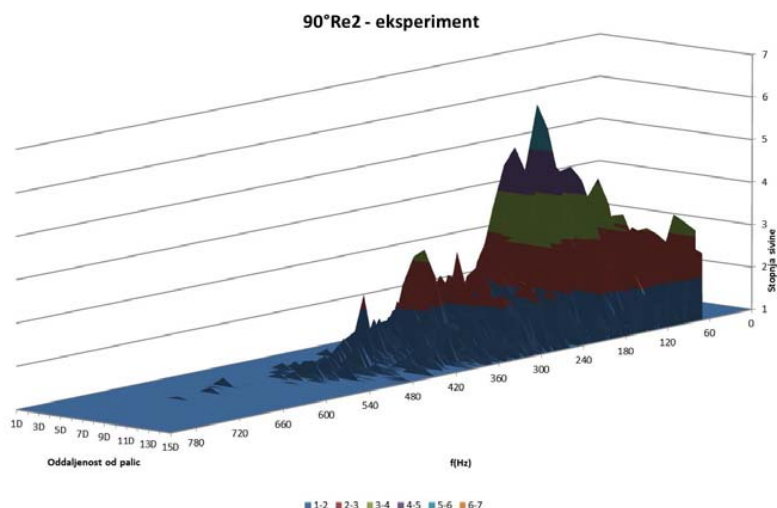
izračuna. Z namenom izbire dovolj majhnega časovnega koraka so bili izbrani časovni koraki $t_1 = 0,001$ s, $t_2 = 0,005$ s in $t_3 = 0,00025$ s. Časovni korak t_1 se je izkazal za neustreznega, medtem ko je razlika med t_2 in t_3 zanemarljivo majhna. Na Slika 6 je prikazan model mreže. Z rumenimi preseki vzdolž ravnine so označena mesta odjema signala fluktuacije hitrosti.



Slika 6: Mreža modela palic in mesta odjema signala fluktuacij hitrosti.

4 Primerjava rezultatov vizualizacije in numerične simulacije

Rezultati eksperimentalnega dela z uporabo vizualizacije so bili analizirani pri različnih oddaljenostih od valjev znotraj kaskade v smeri zračnega toka. Na Slika 7 je prikazana stopnja sivine v odvisnosti od frekvence spreminjanja sivine in oddaljenosti od sredinske palice kaskade. V primeru 90° naklona kaskade in $Re\ 4025$ je na sliki 7 mogoče opaziti izrazitejša vrhova v frekvenčnem območju 170 Hz in 340 Hz. Prvi vrh predstavlja Karmanovo frekvenco, drugi greben pa ustreza prvemu harmoniku frekvence Karmanove vrtinčne steze. V frekvenčnem območju nad frekvenco 170 Hz je mogoče opaziti nastanek vrhov in njihovo postopno znižanje.

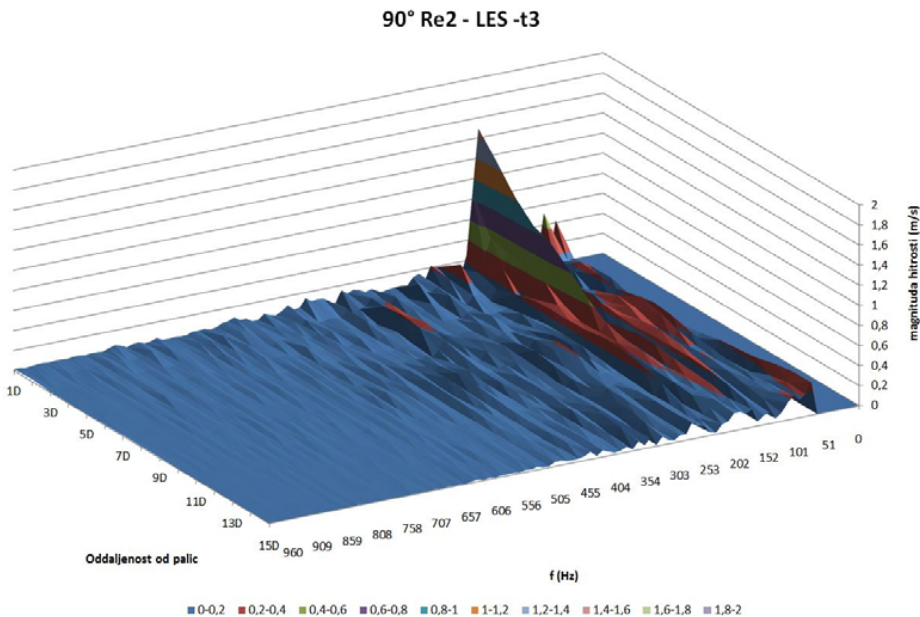


Slika 7: Stopnja sivine pri vizualizaciji v odvisnosti od frekvence in oddaljenosti od kaskade.

Območje generiranja frekvenčnih hrbtov se s povečevanjem frekvence opazovanja zmanjšuje v obliki klina. Opaženo je mogoče pripisati razpadu vrtničnih struktur in interakcijam med vrtničnimi strukturami. Oblika spektra v področju večjih frekvenc pa je pogojena tudi z difuzijskimi mehanizmi, ki sledijo vrtničnemu razpadu.

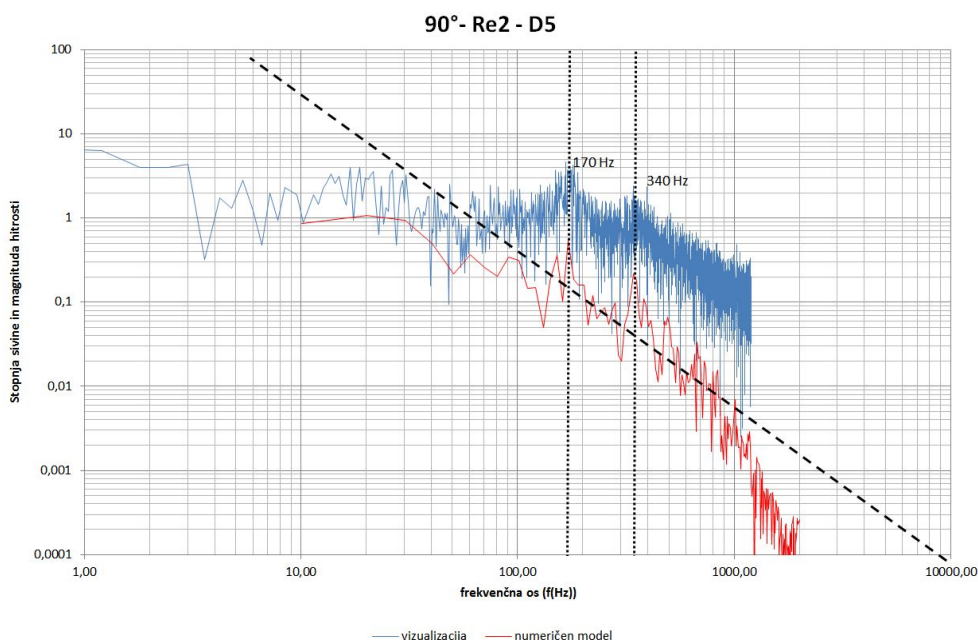
Na Slika 8 je prikazana amplituda numerično modelirane hitrosti v odvisnosti od frekvence fluktuacije in oddaljenosti od sredinske palice kaskade. V enaki delovni točki, kot je bil obravnavan primer pri eksperimentalnem delu je na sliki 8 opaziti povečana vrhova v frekvenčnem območju 170 Hz in 340 Hz. Frekvenčni vrh se minimalno razlikuje od izračunane frekvence po enačbi 3. Frekvenčna vrhova osciliranja hitrostnega polja in skalarne polja polutanta sta minimalno zamaknjena. Nastala razlika je znotraj merilne negotovosti.

Opaziti je značilno povečanje grebena, kateri ustreza Karmanovi vrtnični stezi. Amplituda hitrosti pri frekvenci 170 Hz se poveča iz minimalne vrednosti v razdalji 1D na maksimalno vrednost, nato pa vse do 15D opazovane dolžine pada.



Slika 8: Amplituda hitrostnih fluktuacij v odvisnosti od frekvence in oddaljenosti od kaskade.

Na Slika 9 je prikazana frekvenčna odvisnost stopnje sivine in amplitude hitrosti za časovni korak t_3 pri izbrani razdalji 5D. Na diagramu je mogoče opaziti poleg povečane stopnje sivine pri 170 Hz in 340 Hz tudi značilnosti $-5/3$ kaskadnega razpada polno razvite izotropne turbulence (slika 9, črtkana črta). V skladu s pričakovanim lahko predvidevamo, da se modelirane vrednosti zadovoljivo prilagajajo $-5/3$ zakonu v področju manjših frekvenc ($1/4$ frekvence generiranja sekvenc izračunov). V področju večjih frekvenc pa je izračunana disipacija energije prevelika, kar je razvidno tudi iz diagrama na sliki 8.



Slika 9: Stopnja švine in amplituda fluktuacij hitrosti v odvisnosti od frekvenčne osi na razdalji 5D.

5 Zaključek

V študiji kinematike toka skozi cilindrično kaskado so bile vključene različne merilne metode in numerična simulacija. Kombinacija različnih pristopov omogoča celovitejši vpogled v opazovani primer. Omogočena je tudi primerjava ustreznosti uporabljenih metod. Rezultate meritev in numerične simulacije se je ovrednotilo na osnovi primerjave frekvence Karmanove vrtnične steze po enačbi 2. Iz rezultatov na slikah 7, 8 in 9 ter -5/3 kaskadnega razpada polno razvite izotropne turbulence na osnovi vizualizacije in CFD (ang. Computational Fluid Dynamics) modela je bilo ugotovljeno dobro ujemanje meritev in numeričnega izračuna.

Literatura

- [1] G. Alič, B. Širok, M. Hočevvar, M. Milavec, *Vpliv zaščitne mreže na integralno in zvočno karakteristiko aksialnega ventilatorja*, Kuhljevi dnevi 2008, September 2008.
- [2] G. Alič, *Zaščitna mreža aksialnih turbinskih strojev v tokovnem polju*, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, doktorsko delo 2011.
- [3] Graham, J. M. R., *The effect of end plates on the two-dimensionality of wortex wake*; Aero, 1969 LES.
- [4] B. Širok, *Vizualizacija v eksperimentalnem modeliranju in diagnostiki procesov*, Ljubljana 2007.
- [5] ANSYS CFX, Release 12.0, *ANSYS CFX - Solver Theory Guide*, 2009.



Teoretična in računalniška analiza aerodinamičnih razmer v predoru

Jurij Modic¹

Theoretical and computational analysis of aerodynamic conditions in the tunnel

Povzetek. V delu je predstavljena analiza razmer v cestnem predoru. Izdelan je splošni model predora, nato pa nastavljena diferencialna enačba, ki opisuje razmere v predoru. Enačba je rešena numerično, nato pa tudi poenostavljena, da jo je možno enostavno uporabiti v praksi. Na koncu je na osnovi algoritmov izdelan računalniški program, s katerim je možno enostavno in učinkovito analizirati stanje v predoru ob različnih pogojih.

Abstract. This paper presents an analysis of the situation in the road tunnel. Made a general model of the tunnel, then set up a differential equation which describes the conditions in the tunnel. The equation is solved numerically, then the simplified, it can be applied in practice. Finally, based on the algorithms to a computer program which can be easily and effectively analyze the situation in the tunnel at different conditions.

1 Uvod

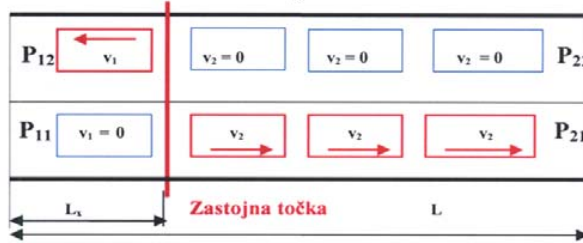
Načrtovanje, gradnja, oprema, obratovanje, vzdrževanje ter nadzorovanje stanja v cestnih predorih je, v celoti gledano, interdisciplinarno področje. Pri je potrebno znanje rudarstva, gradbeništva, elektrotehnike, strojništva, prometnih tokov, itd. Zaradi interdisciplinarnosti, prav tako pa tudi zaradi pomembnosti, so vse omenjene stroke enakovredne, vse so enako pomembne. Za varnost uporabnikov, pa tudi za varnost prometa, predvsem glede vidljivosti, je pomemben sestav zraka v predoru. Tako koncentracije ogljikovega monoksida in dušikovih oksidov zaradi zdravstvenih razlogov, koncentracija dima in saj pa zaradi varnosti prometa, t.j. vidljivosti, ne smejo presegati s standardi določenih maksimalnih dovoljenih vrednosti. To dosežemo z ustrezno količino dovedenega svežega zraka. Zrak dovajamo prisilno, s pomočjo ventilatorjev, kar je energetsko zelo drago, ali pa naravno, zaradi indukcije, povzročene z gibanjem vozil. V ta namen gradimo predvsem predore z

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

enosmernim prometom, kar je gradbeno sicer dražje, vendar so pogonski stroški bistveno nižji, saj prisilno prezračevanje zahteva električno moč reda velikosti nekaj megavatov. Analizirati moramo tudi razmere v primeru požara.

2 Situacija in osnovna izhodišča

Analizirajmo najbolj splošen primer, ko poteka promet skozi eno predorsko cev v dveh smereh. Na poljubni razdalji L_x imamo zastojno področje (točko). V tej točki se pojavi ovira, ki zaustavi promet. V predoru si zamislimo področja: P_{11} , P_{12} , P_{21} in P_{22} .



Slika 2.1: Splošno stanje v predoru.

P_{11}

$v_1 = 0$

N_{os} - število stojećih osebnih vozil

N_{ts} - število stojećih tovornih vozil

P_{12}

$v_1 > 0$

N_{o1} - število vozećih osebnih vozil

N_{t1} - število vozećih tovornih vozil

P_{21}

$v_2 > 0$

N_{o2} - število vozećih osebnih vozil

N_{t2} - število vozećih tovornih vozil

P_{22}

$v_2 = 0$

N_{os} - število stojećih osebnih vozil

N_{ts} - število stojećih tovornih vozil

Splošna diferencialna enačba (členi A, B, C, D, E in F) ima obliko

$$\frac{du}{dt} = \pm A(u, t) \pm B(u, t) \pm C(u, t) \pm D(u, t) \pm E(u, t) \pm F(u, t) \quad (1)$$

Če upoštevamo vpliv vseh parametrov, dobimo končno diferencialno enačbo.

$$\frac{du}{dt} = - \left(\frac{\lambda}{D_h} + \frac{\sum \xi_i}{L} \right) \frac{u^2}{2} \text{sign} u \pm \quad A$$

$$\pm \frac{\Delta p}{\rho L} - \quad B$$

$$- \frac{1}{LA} \left(c_{wo}^* A_{vo} N_{os} + c_{wt}^* A_{vt} N_{ts} \right) \frac{u^2}{2} \text{sign} u - \quad C$$

$$- \frac{1}{LA} \left(c_{wo}^* A_{vo} N_{o1} + c_{wt}^* A_{vt} N_{t1} \right) \left(1 - \frac{t}{L_x} |v_1| \right) \frac{(v_1 + u)^2}{2} \text{sign}(v_1 + u) + \quad D$$

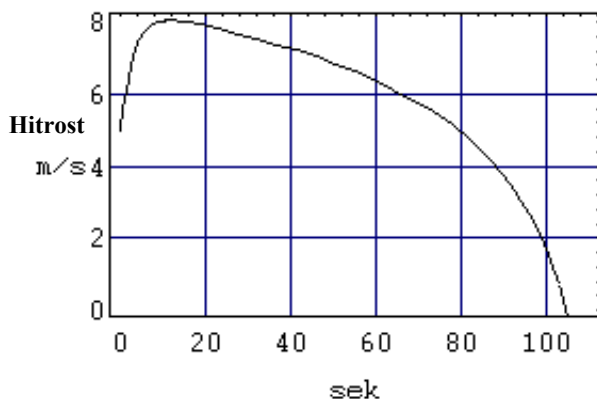
$$+ \frac{1}{LA} \left(c_{wo}^* A_{vo} N_{o2} + c_{wt}^* A_{vt} N_{t2} \right) \left(1 - \frac{t}{L - L_x} |v_2| \right) \frac{(v_2 - u)^2}{2} \text{sign}(v_2 - u) \pm \quad E$$

$$\pm \frac{S_p}{\rho L A} \quad F \quad (2)$$

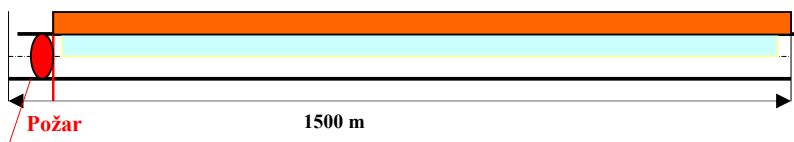
u...	hitrost zraka	m/s	t...	čas	s
p...	zračni tlak	bar	v...	hitrost vozil	m/s
A,B,C,D,E,F... simbolna oznaka členov enačbe					

Enačba (2) je univerzalna, zato omogoča analizo hitrosti gibanja zraka tako v predorih z dvosmernim, kakor tudi v predorih z enosmernim prometom. Vsebuje elemente časovne in krajevne skale. Časovna odvisnost je definirana s časom t , oz. z odvodom hitrosti po času, krajevna pa s končno dolžino predora L in delno dolžino L_x .

Diferencialna enačba (2) je sestavljena iz šestih členov. Prvi člen (A) zajema trenje, drugi člen (B) tlačno razliko med portali, tretji člen (C) vpliv stoječih vozil, četrti (D) in peti člen (E) vpliv vozečih vozil in smer gibanja v eni ali v drugi smeri, šesti člen (F) pa vpliv ventilatorjev. Pri tekočem prometu odpade vpliv stoječih vozil, člena D in E pa vplivata v nasprotnih smereh. Zato moramo v predorih z dvosmernim prometom zagotoviti gibanje zraka s pomočjo ventilatorjev, ali z drugimi besedami, naravno prezračevanje ni možno, razen če imamo dovolj veliko tlačno razliko med portali. Vendar je ta razlika spremenljiva, tako po velikosti, kakor tudi po smeri. Enačba je atipična, najbolje jo je reševati numerično. Časovno odvisen potek hitrosti ob ustreznih robnih pogojih, če je zastoj na začetku 1500 m dolgega predora je prikazan na sliki 2.2.



Ob zastoju se hitrost zaradi izpada batnega efekta v negativni smeri poveča, nato pa zaradi vse manjšega števila vozil zaradi izhoda iz predora, in posledično vse šibkejšega pozitivnega batnega efekta, začne zmanjševati.



Slika 2.2: Časovni potek hitrosti zraka v predoru ($L=1500$ m) ob zastoju na začetku predora

Če se omejimo na predore s tekočim enosmernim prometom, odpadeta člena C in D, če je prezračevanje *naravno*, odpade člen F. Ravno tako odpade oznaka sign, ker hitrosti ne spreminjajo svoje smeri.

Tako dobi enačba (2) za predore s tekočim enosmernim prometom, brez upoštevanja vpliva ventilatorjev in vetra enostavnejšo obliko

$$\frac{du}{dt} = - \left(\frac{\lambda}{D_h} + \frac{\Sigma \xi}{L} \right) \frac{u^2}{2} + \frac{1}{LA} (c_{wo}^* A_{vo} N_o + c_{wt}^* A_{vt} N_t) \left(1 - \frac{t}{L-L_x} |v| \right) \frac{(v-u)^2}{2} \quad (3)$$

Ker je promet sestavljen iz osebnih in iz tovornih vozil, in je delež tovornih vozil podan v odstotkih z ozirom na celoten promet (p_t), lahko zapišemo za celotno število vozil v polnem predoru v odvisnosti od deleža tovornih vozil

$$N = \left(1 - \frac{p_t}{100} \right) N_o + \frac{p_t}{100} N_t \quad (4)$$

V realnih razmerah pa moramo upoštevati mešan promet skozi predor kot kombinacijo osebnih in tovornih vozil, torej trenutno naključno stanje, ter tudi gostoto prometa. V tem primeru variira hitrost od minimalne, povzročene s prometom osebnih vozil, do maksimalne, povzročene s prometom tovornih vozil. Tako dobimo različne kombinacije, ki so za analizo trenutnih razmer primerne, problem pa nastane, če želimo izračunati hitrosti, ki jih želimo uporabiti za izračun (potrebne) povprečne količine zraka, ki je osnovni kriterij za odločitev, ali zadošča naravno prezračevanje, ali ne.

Če v enačbi (3) za enosmerni promet upoštevamo še razmere v določenem trenutku, lahko predpostavimo kvazistacionarno stanje, torej

$$t = 0 \text{ in } \frac{du}{dt} = 0$$

Tako iz enačbe (3) dobimo enačbo

$$\frac{1}{LA} (c_{wo}^* A_{vo} N_o + c_{wt}^* A_{vt} N_t) \frac{(v-u)^2}{2} - \left(\frac{\lambda}{D_h} + \frac{\Sigma \xi}{L} \right) \frac{u^2}{2} \left(\pm \frac{\Delta p}{L \rho} \right) = 0 \quad (5)$$

S pomočjo enačbe (5) lahko določimo hitrost zraka na koncu predora, torej pri dolžini L v odvisnosti od števila vozil, pri tem pa moramo upoštevati ustrezno število vozil na vsakokratni dolžini predora. Za analizo hitrosti na koncu vsakega od množice predorov preuredimo enačbo tako, da pri znanih podatkih: dolžini in prerezu predora, hitrosti vožnje in številu vozil izračunamo ustrezno hitrost zraka. Tako dobimo

$$\begin{aligned} & u^2 \left\{ \frac{1}{2LA} \left[\left(1 - \frac{p_t}{100} \right) \frac{M}{L} l_o c_{wo}^* A_{vo} + \frac{p_t}{100} \frac{M}{L} l_t c_{wt}^* A_{vt} \right] - 0.50 \left(\frac{\lambda}{D_h} + \frac{1.35}{L} \right) \right\} - \\ & - u \left\{ \frac{1}{LA} \left[\left(1 - \frac{p_t}{100} \right) \frac{M}{L} l_o c_{wo}^* A_{vo} + \frac{p_t}{100} \frac{M}{L} l_t c_{wt}^* A_{vt} \right] v \right\} + \\ & + v^2 \left\{ \frac{1}{2LA} \left[\left(1 - \frac{p_t}{100} \right) \frac{M}{L} l_o c_{wo}^* A_{vo} + \frac{p_t}{100} \frac{M}{L} l_t c_{wt}^* A_{vt} \right] \right\} \pm \frac{\Delta p}{L \rho} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Kvadratna enačba (6), ki ima negativno diskriminanto, in torej dva realna korena, omogoča izračun hitrosti zraka na koncu predora z enosmernim prometom kot funkcijo dolžine in

prereza predora ter lastnosti (koeficienta zračnega upora in čelne površine) vozil, števila in hitrosti vozil, ter koeficienta trenja ob stenah predora.

Če v enačbi (6) posamezne koeficiente nadomestimo s simboli

$$f_1 = \left\{ \frac{1}{2LA} \left[\left(1 - \frac{p_t}{100} \right) \frac{M}{L} l_o c_{wo}^* A_{vo} + \frac{p_t}{100} \frac{M}{L} l_t c_{wt}^* A_{vt} \right] - 0.50 \left(\frac{\lambda}{D_h} + \frac{1.35}{L} \right) \right\} \quad (7)$$

$$f_2 = - \left\{ \frac{1}{LA} \left[\left(1 - \frac{p_t}{100} \right) \frac{M}{L} l_o c_{wo}^* A_{vo} + \frac{p_t}{100} \frac{M}{L} l_t c_{wt}^* A_{vt} \right] v \right\} \quad (8)$$

$$f_3 = \left\{ \frac{1}{2LA} \left[\left(1 - \frac{p_t}{100} \right) \frac{M}{L} l_o c_{wo}^* A_{vo} + \frac{p_t}{100} \frac{M}{L} l_t c_{wt}^* A_{vt} \right] v^2 \right\} \quad (9)$$

je rešitev enačbe, ki ima negativno in pozitivno rešitev, za hitrost zraka

$$u = \frac{-\frac{f_2}{2} + \left[\left(\frac{f_2}{2} \right)^2 - f_1 f_3 \right]^{0.50}}{f_1} \quad (10)$$

Od tu vidimo, da vsebuje hitrost zraka naslednje funkcijske povezave med parametric

$$u = u(L, A, D_h, \lambda, \Sigma \xi, \Delta p, p_t, c_{wo}^*, c_{wt}^*, M, l_o, l_t) \quad (11)$$

Iz izraza (11) vidimo, da je hitrost zraka na koncu predora funkcija številnih parametrov. Zato moramo za njen konkreten izračun zmanjšati število parametrov. To storimo tako, da izberemo množico enakih predorov, pri katerih se spreminja samo dolžina L , variiramo pa n . pr. število vozil, ki vozijo skozi predor, pri tem pa se ne spreminjajo ostali, za promet značilni parametri. Ta postopek lahko ponavljamo za različne primere in variiramo različne parametre.

Ob enem pa to pomeni, da s spreminjanjem parametrov (temperatura, nadmorska višina, veter, promet, ...) lahko izdelamo celotno analizo stanja v predoru. Vendar pa to pomeni dolgotrajno in zamudno računanje, zato prikazane algoritme raje uporabimo za izdelavo računalniškega programa, katerega uporaba je hitra in enostavna, seveda pa moramo biti pazljivi pri vnašanju vrednosti, ki jih program zahteva, in moramo delati z inženirskim občutkom!

3 Uporaba računalniškega programa

3.1 O programu²

Izmed vrste programov smo izbrali program IDA RTV, izdelek EQUA Simulation AB, november 2005³, ki upošteva prikazane algoritme, dopolnjene z nekaterimi praktičnimi

² Avtor je prispeval k testiranju programa z realnimi podatki

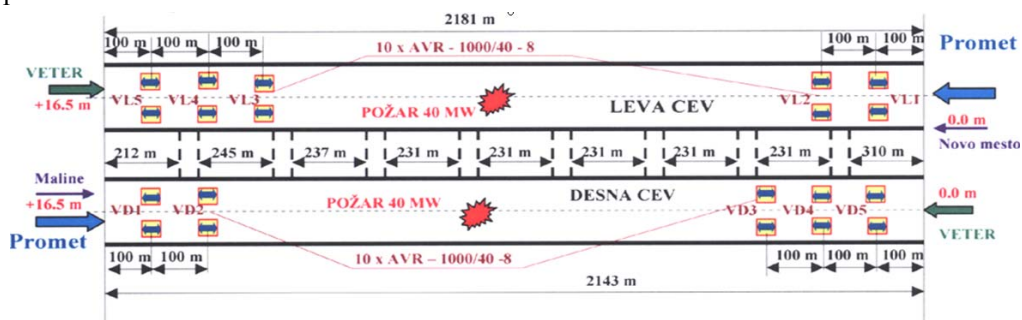
izkušnjami. Je v praksi zelo razširjen, verificiran in zanesljiv. Z njim je možno analizirati stanje v predoru pri različnih sistemih prezračevanja, v primeru požara in pri različnih zunanjih pogojih.

Program upošteva omejitve z ozirom na splošne, po standardih določene mejne vrednosti (koncentracija CO, NO₂, ekstinkcija, hitrost gibanja zraka) in izračuna še druge relevantne parametre (temperatura zraka in stropa v primeru požara, kritična hitrost, ...).

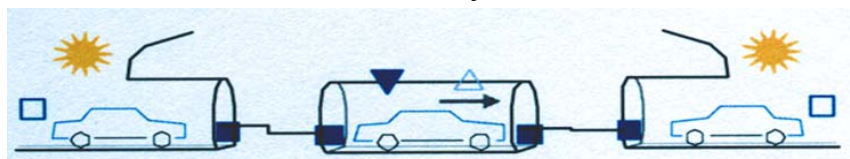
3.2 Prikaz predora⁴ in izračunov

Posebej bodite pozorni na pravilne razmike med naslovi in besedilom. Ti se razlikujejo glede na nivo naslova.

Naslovi poglavij so oddaljeni 15 točk od zgornjega besedila, za naslovom pa je 10 točk prostora. Podnaslovi so oddaljeni 13 točk od zgornjega besedila, za njimi pa je 8 točk prostora. Podpodnaslovi so oddaljeni 11 točk od zgornjega besedila, za njimi pa je 7 točk prostora.



Slika 3.1: Predor Gorjanci – shema.

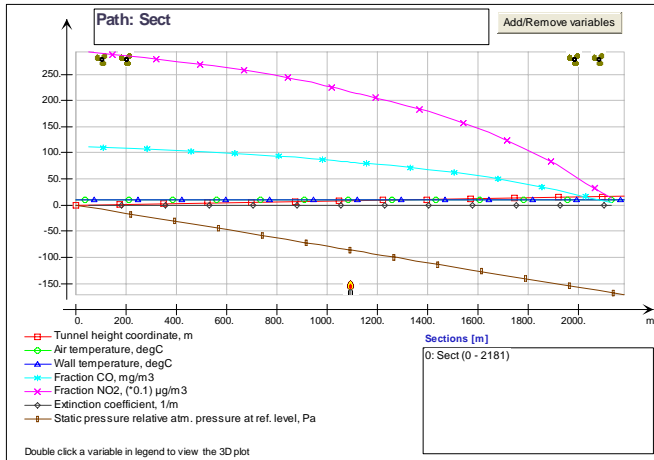


Slika 3.2: Računalniška shema leve cevi.

³ P. Sahlin; *On design and control of complex tunnel ventilation systems applying the HIL tunnel simulator*, 12th International Symposium on Aerodynamics and Ventilation of Vehicle Tunnels, Portorož, July 2006.

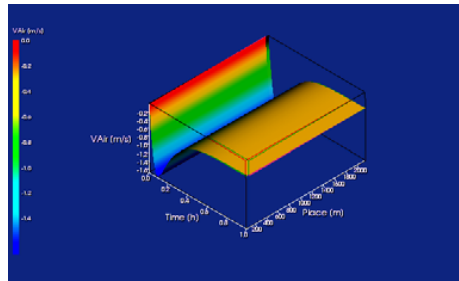
⁴ Povzetek idejnega projekta predora pod Gorjanci

3.3 Izračuni – uporaba računalniškega programa IDA - RTV



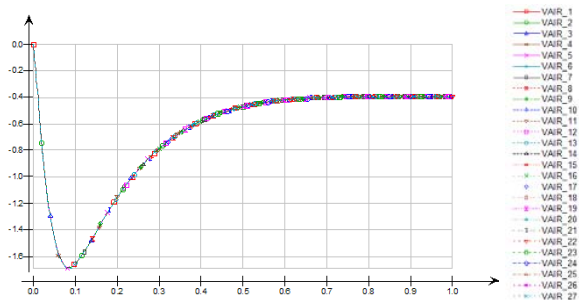
Slika 3.3: Grafični prikaz izračunov, leva cev, protiveter, hitrost vožnje 5 km/h.

Na sliki 3.3 so prikazane so vse relevantne izračunane vrednosti v grafični obliki, pri hitrosti vožnje 5 km/h, in pri protivetru.



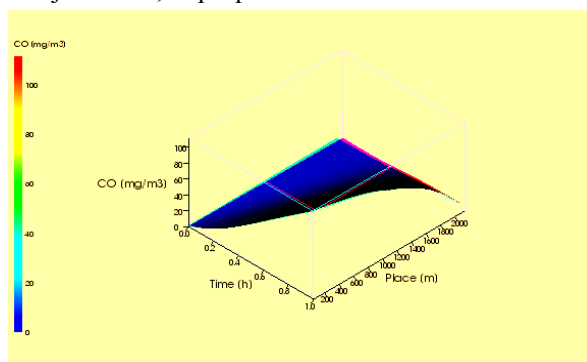
Slika 3.4: Leva cev, hitrost vožnje 5 km/h, hitrost zraka v odvisnosti od časa in dolžine.

Na sliki 3.4 je prikazana hitrost gibanja zraka vzdolž predora, v odvisnosti od časa, pri hitrosti vožnje 5 km/h, in pri protivetru.



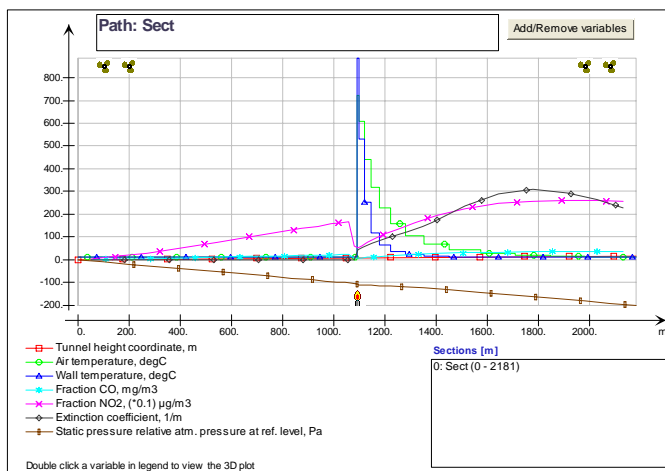
Slika 3.5: Leva cev, hitrost vožnje 5 km/h, hitrosti v posameznih sektorjih v odvisnosti od časa

Na sliki 3.5 so prikazane hitrosti gibanja zraka v posameznih sektorjih predora v odvisnosti od časa pri hitrosti vožnje 5 km/h, in pri protivetru.



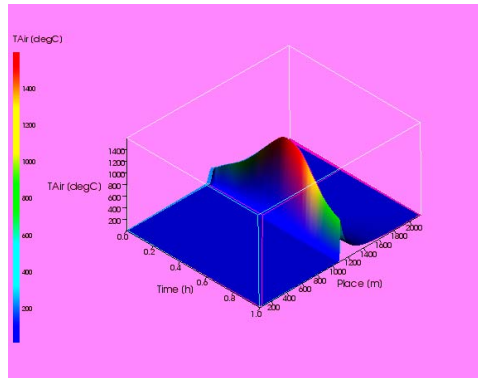
Slika 3.6: Leva cev, hitrost vožnje 5 km/h, koncentracije CO v odvisnosti od časa in dolžine

Na sliki 3.6 so prikazane koncentracije CO vzdolž predora v odvisnosti od časa pri hitrosti vožnje 5 km/h, in pri protivetru.



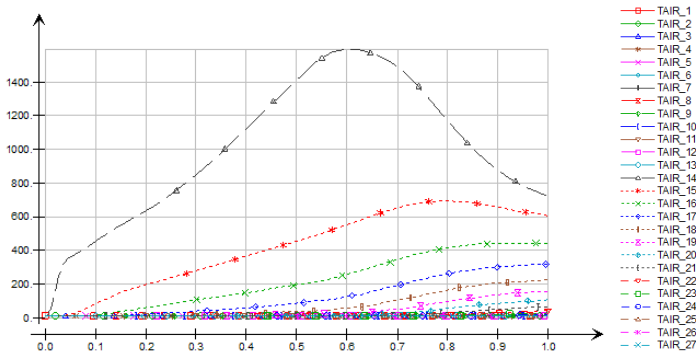
Slika 3.7: Grafični prikaz izračunov, leva cev, protiveter, požar 40 MW.

Na sliki 3.7 so prikazane so vse relevantne izračunane vrednosti v levi cevi, v grafični obliki, v primeru požara z močjo 40 MW, v primeru protivetra.



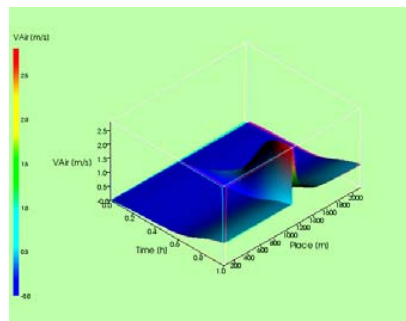
Slika 3.8: Temperatura zraka, leva cev, protiveter, požar 40 MW.

Na sliki 3.8 je prikazana temperatura zraka vzdolž leve cevi predora, v odvisnosti od časa, pri požaru z močjo 40 MW, v primeru protivetra.



Slika 3.9: Leva cev, hitrost vožnje 5 km/h, temperatura zraka odvisna od časa, požar 40 MW.

Na sliki 3.9 so prikazane temperature zraka ob požaru moči 40 MW, v posameznih sektorjih leve cevi, v odvisnosti od časa in pri protivetru.



Slika 3.10: Leva cev, hitrost zraka, požar 40 MW.

Na sliki 3.9 je prikazana hitrost gibanja zraka vzdolž leve cevi v odvisnosti od časa, pri moči požara 40 MW in pri protivetru.

4 Zaključek

Dogajanja v predoru so zelo raznolika, dinamična in včasih tudi kaotična. Na osnovi teoretičnih izhodišč ter s pomočjo ustreznih enačb in modelov lahko ta dogajanja obvladujemo. Vendar so te analize zamudne in imajo predvsem raziskovalni značaj. Če pa se postavimo na praktično stališče vidimo, da moramo poznati predvsem najneugodnejše razmere, ki so merodajne za načrtovanje v praksi. Zato je koristno, da poznamo vsa teoretična izhodišča, kajti le na ta način lahko obvladujemo celotno tematiko. Za praktično delo pa potrebujemo določene poenostavitve in olajšave, predvsem v obliki računalniških programov. Vendar moramo programe uporabljati z inženirskim razmišljanjem in z razumom. Samo na ta način smo lahko prepričani, da so dobljeni rezultati realni in zanesljivi.

Literatura

- [1] J. Modic, *Velocity Field and Concentration of Noxious Substances in Tunnel*, Dissertation, Faculty of Mechanical Engineering, Ljubljana, July 1997.
- [2] ASHRAE, *Enclosed Vehicular Facilities, Chapter 12, Atlanta*, 2008.
- [3] Sahlin, P., *On design and control of complex tunnel ventilation systems applying the HIL tunnel simulator*, 12th International Symposium on Aerodynamics and Ventilation of Vehicle Tunnels, (IDA RTV), Portorož, July 2006.
- [4] K. Pucher, *Sicherheit in Tunnelanlagen – Feuer im Mont Blanc und Tauern Tunnel*.
- [5] Bendelius, *Simulation of Escape from Road Tunnels using Simulex*, Graz, 2007.
- [6] P. Miclea, *The Effects of Delayed Emergency Fan Start on Controlling the Heat and Smoke from a Growing Tunnel Fire*, Baltimore, 2002.



Raziskava tokovnih razmer na bočnem prelivu z uporabo vizualizacijske metode

G. Novak¹, F. Steinman² in T. Bajcar³

Study of flow at side weir using visualization method

Povzetek. V prispevku je predstavljena zanesljiva metoda za natančno ne-kontaktno merjenje hitrostnih polj in vzdolžnih profilov gladine na modelu bočnega preлива. Metoda bo koristna pri raziskavah visokovodnih razbremenilnih objektov, ki se načrtujejo v sklopu bodočih hidroelektrarn na spodnji Savi. Prispevek se osredotoča na določitev vpliva, ki ga ima dolvodni preliv Z_g v glavnem kanalu na lateralni odtok Q_s preko ostrorobega pravokotnega bočnega preлива. Kvantifikacija hitrostnih polj z uporabo vizualizacijske metode je pokazala, da je porazdelitev hitrosti neenakomerna. Vzdolžne komponente hitrosti U bočnega odtoka so večje od ustreznih povprečnih hitrosti V glavnega kanala, razen v zastojni coni, formirani na dolvodnem koncu bočnega preлива. Merjeni bočni pretoki so bili skladni z izračunanimi vrednostmi. Slednje so bile dobljene z upoštevanjem pretočnega koeficienta C_d , kot ga podajajo May in sod. [7], ki zagovarjajo pristop z gibalno količino, oz. Singh in sod. [11], ki zagovarjajo pristop s konstantno specifično energijo. Kot dodaten rezultat je predlagan nov fenomenološki model za C_d , ki vključuje vpliv Z_g na Q_s .

Abstract. This paper presents a reliable method for accurate non-contact measurements of velocity field and longitudinal water surface profiles at model side weir and should prove valuable in investigations of flood overflow structures, which are being designed within the framework of future hydro power plants on the Sava River in Slovenia. We focused on the influence of downstream main channel weir Z_g on the lateral discharge Q_s over a sharp-crested rectangular side weir. Quantification of velocity fields using visualization method showed that velocities at side weir were not uniform. Longitudinal components of overflow velocities U were greater than corresponding main channel cross section average velocities V , except in stagnation zone that formed at the downstream end of the side weir. Measured side weir discharges were in good agreement with calculated values, using discharge coefficient C_d from the momentum-approach-based equation by May et al. [7] and the energy-approach-based equation by Singh et al. [11]. As an additional result, a new phenomenological model for C_d is proposed to illustrate the influence of Z_g on Q_s .

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

² Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

³ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

1 Uvod

Bočni prelivs so različni hidravlični objekti, preko katerih se del vode iz glavnega kanala bočno preliva v odvodni kanal ali na inundacijo vodotoka. Kot objekti za regulacijo so uporabljeni v namakalnih, kanalizacijskih sistemih in kot visokovodni razbremenilni objekti za protipoplavno zaščito. Varianta slednjega se obravnava pri pripravi načrtov za bodočo HE Brežice, ki bo imela akumulacijo obdano z nasipi, del dotoka pa se bo v času visokih vod v bližini JE Krško razlival na Krško-brežiško polje.

Predstavljena raziskava se osredotoča na ostrorobi pravokotni bočni preliv v glavnem kanalu s pravokotnim prerezumom. Tudi pri najpreprostejši (in najpogostejše obravnavani) geometriji bočnega preliva so tokovne razmere dokaj kompleksne. Gre za prostorsko spremenljiv tok, ki se ga v literaturi poenostavljeno obravnava z 1D enačbami, od katerih ene izhajajo iz koncepta konstantne specifične energije, druge pa upoštevajo pristop z ravnotežjem gibalne količine. Bistvena razlika med pristopoma je v predpostavki glede hitrosti U in V , pri čemer je U komponenta hitrosti bočno odtekajoče vode, ki kaže v smeri vzdolžne osi glavnega kanala, V pa povprečna hitrost toka v glavnem kanalu v pripadajočem prečnem prerezu. Energijski pristop predpostavlja, da je porazdelitev hitrosti enakomerna, tj. $U = V$ in Coriolisov koeficient enak $\alpha = 1$, pristop z gibalno količino pa predpostavlja, da velja $U \neq V$. Dodatno se predpostavlja, da je tok približno 2D in da je porazdelitev tlakov kljub ukrivljenosti gladine približno hidrostatična. Večina avtorjev se je za potrebe dimenzioniranja osredotočila na določitev pretočnega koeficienta bočnega preliva C_d in skupnega lateralnega odtoka Q_s . Za koeficient C_d obstaja veliko različnih formulacij, v splošnem pa je C_d podan kot funkcija brezdimenzijskih parametrov toka in geometrije. Med novjšimi raziskavami Borghei in sod. [2], Singh in sod. [11] ter Swamee in sod. [12] svoje formulacije izpeljujejo iz energijskega koncepta, medtem ko Das [3], El-Khashab in Smith [4], Hager in Volkart [5], Lee in Holley [6] ter May in sod. [7] preferirajo pristop z gibalno količino.

Namen predstavljene eksperimentalne raziskave, ki je del nastajajoče doktorske disertacije, je dvojen: 1) izmeriti hitrostna polja na območju bočnega preliva z uporabo ne-kontaktne vizualizacijske metode, 2) z brezdimenzijsko analizo določiti izraz za C_d , v katerem bo zajet vpliv, ki ga ima dolvodni preliv glavnega kanala na odtok preko bočnega preliva. Točka 1 odgovori na vprašanje ustreznjega pristopa (energijski pristop ali pristop z gibalno količino), točka 2 pa dopolnjuje obstoječi nabor formulacij C_d z enačbo, ki bi lahko bila uporabljena pri obravnavi primerov, kjer je treba upoštevati vpliv dolvodnega preliva v glavnem kanalu (npr. jez JE Krško ali pregrada bodoče HE Brežice) na pretok preko bočnega preliva (npr. visokovodni razbremenilni objekti).

2 Metodologija

Raziskava je izrazito eksperimentalno naravnana. Poudarek je na ne-kontaktne merjenju hidravličnih veličin, pri čemer so bila hitrostna polja izmerjena z uporabo vizualizacijske metode, ki so jo predstavili Bajcar in sod. [1], vzdolžni poteki glavin pa so bili določeni z uporabo laserske vertikalne presečne ravnine.

Vizualizacijska metoda za določitev hitrostnih polj temelji na ideji, da se vektorsko polje hitrosti poveže s skalarnim poljem koncentracij polutanta (oz. barvila), slednjega pa se analizira iz zaporedja digitalnih črno-belih posnetkov toka z obravnavo odtenkov sivine.

Metoda omogoča meritve hitrostnih polj z zelo veliko prostorsko in časovno ločljivostjo, saj so vektorji hitrosti s posebnim Matlab skriptom izračunani za vsak piksel slike (512 x 384, format bmp), zajete s frekvenco 300 slik na sekundo (fps). Poudariti velja, da metoda poleg tega omogoča kvantifikacijo hitrostnega polja na celotnem obravnavanem območju (tj. kadru posnetka) istočasno.

V našem primeru so bili v vlogi polutanta vodikovi mehurčki, pridobljeni z elektrolizo. V ta namen je bila v dno glavnega kanala gorvodno od bočnega preliva vgrajena bakrena plošča, kot druga elektroda pa je služila 0,5 mm žica na premičnih nosilcih, napeljana skozi tok vode preko celotne širine kanala. Ko elektrodi priključimo na vir enosmerne napetosti, se vzdolž žice generirajo vodikovi mehurčki, ki imajo premer primerljiv s premerom žice (glej [13]), in ki sledijo toku. Tako pripotujejo do območja bočnega preliva, kjer jih osvetlimo s horizontalno svetlobno ravnino, debeline približno 5 mm, njihovo premikanje z vodnim tokom pa posnamemo s hitro digitalno kamero. Pri tem je osvetlitev vsakokrat na enaki višini kot žička, tj. na višini Z_w .

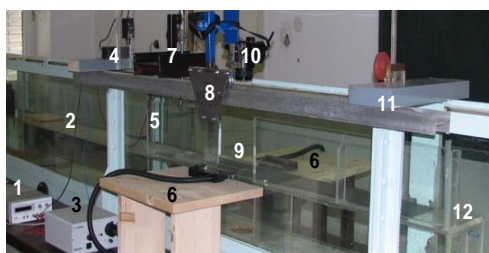
Za določitev vzdolžnih prereзов gladin dodajanje polutanta ni potrebno, saj zadostuje, da se v toku osvetli tanka vertikalna ravnina, nakar se dobljeni prerez slika z bočne strani. V ta namen smo uporabili zeleni laser, posnetki (Slika 3) pa so bili narejeni v temi. Vzdolžni potek gladine je bil z Matlabom določen na podlagi barv posameznih pikslov.

3 Eksperiment

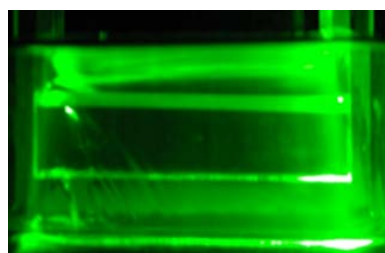
Eksperiment poteka na fizičnem modelu bočnega preliva v laboratoriju Katedre za mehaniko tekočin UL FGG. Osnovne značilnosti modela kažeta slika 1 in slika 2.



Slika 1: Fizični model bočnega preliva. Dimenzije so v cm.



Slika 2: Merilna oprema.



Slika 3: Laserska vertikalna ravnina.

Da bi čim boljše izkoristili prednosti vizualizacijskega pristopa, je bil v stekleni kanal (7,5 x 0,2 x 0,5 m) vstavljen model iz pleksi stekla. Pretoki so bili merjeni na trikotnih prelivih.

Na sliki 2 so: (1) vir enosmerne napetosti, (2) stekleni kanal, (3) svetlobni vir, (4) laser, (5) žica in nosilec, (6) ravninska leča, (7) nastavitev višine Z_w , (8) nosilec na tračnici, (9) bočni preliv, (10) visoko-hitrostna kamera, (11) ostno merilo, (12) dolvodni preliv višine Z_g .

Hitrostna polja so bila izmerjena večinoma na štirih globinah: tik pod gladino toka z globino Z_p , tj. $Z_w = Z_p - 0,5$ cm, na višini krone bočnega preliva ($Z_w = p$), na višini $Z_w = p/2$ in blizu dna glavnega kanala ($Z_w = 1$ cm). Za vsako pozicijo Z_w so bili posneti trije filmi, tako da so bili zajeti odseki vzdolž bočnega preliva ter gorvodno in dolvodno od njega.

Predstavljena raziskava je zaradi kapacitet laboratorija zaenkrat omejena na sorazmerno ozek glavni kanal in majhne pretoke. Velja pa poudariti, da so bili v naših eksperimentih kljub temu doseženi brezdimenzijski parametri toka (Fr_I , Q_s/Q_I) in geometrije (B/L), ki so znotraj razpona vrednosti, ki jih obravnavajo ostale nedavne raziskave, kar je razvidno iz tabele 1.

Tabela 1: Razpon merjenih parametrov po virih literature

Raziskava	B [cm]	L [cm]	p [cm]	Q_I [l/s]	B/L [-]	Fr_I [-]	Q_s/Q_I [-]
Singh in sod. (1994)	25	10-20	6-12	10-14	1.25–2.5	0.2–0.4	-
Swamme in sod. (1994)	50	20-50	0-60	20-100	1–2.5	0.1–0.93	-
Borghei in sod. (1999)	30	20, 30, 45, 70	1,10,19	35-100	0.43–1.5	0.1–0.9	-
Pinheiro in Silva (1999)	50	150,200	20	25-150	0.25–0.33	< 1	0.25, 0.5, 0.75
El-Khashab in Smith (1976)	46	120,230	10-25	≤ 220	0.2–0.38	≤ 1.2	0.3 – 0.8
Hager (1987)	30	100	0-20	≤ 45	0.3	0.3-2	-
May in sod. (2003) – povpr.	21-60	20-100	5-25	-	0.21–3	< 1	0.08–1
Novak in sod. (2011)	14.5	18.2	5	≤ 5	0.8	0.39–0.83	0.13– 0.26

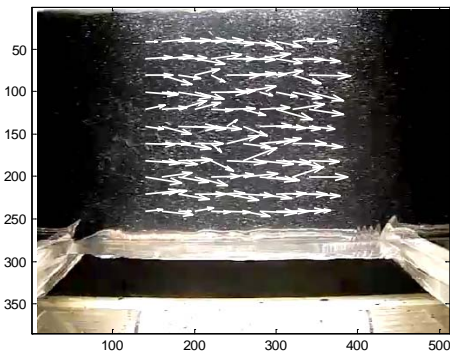
Naši parametri so najbolj podobni tistim z modela Singh in sod. [11]. Pinheiro in Silva [9] sta eksperimente izvajala na bistveno večjem modelu, da bi zagotovila kar najmanjši vpliv merila. Preden sta predlagala svojo enačbo prelivnega koeficienta C_d , sta dejala, da izmed analiziranih študij prav formulacija Singh in sod. [11] daje vrednosti Q_s , ki najbolj odgovarjajo njunim meritvam. Testirali smo tudi nekoliko večje dotoke (tja do 7,5 l/s), vendar smo izločili primere, kjer se Q_s ni prelival neovirano. Dodatno smo izločili tudi primere, pri katerih je odtok Q_2 presegal kapaciteto standardiziranega V-preliva.

Za oceno merilne negotovosti izmerjenih vektorjev hitrosti so bili izvedeni eksperimenti s plastičnimi in lesenimi okroglimi ploščatimi plovci. Da bi izločili negotovosti, ki v splošnem lahko nastopajo v povezavi z: 1) zamikom tokovnic zaradi vzgona, 2) dolžine začetnega pospeševanja mehurčkov, 3) vodne brazde za žico in 4) časa razpada mehurčkov zaradi absorpcije, smo upoštevali napotke Okamoto in sod. [8]. Ocenjujemo, da je merilna negotovost izmerjenih hitrostnih vektorjev do 5 %.

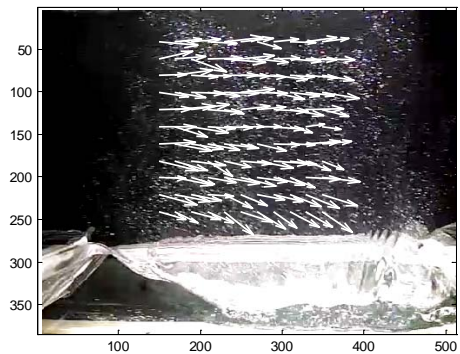
4 Rezultati

4.1 Polja hitrosti

Tipični rezultati kvantifikacije hitrostnih polj so prikazani na slikah 4 in 5, ki prikazujeta hitrosti znotraj (poljubno) izbranega okna 220 x 240 pikslov. Vektorji hitrosti so izračunani za vsak piksel, vendar so zaradi nazornosti prikazani le nekateri, v redkejši mreži, a brez povprečenja.

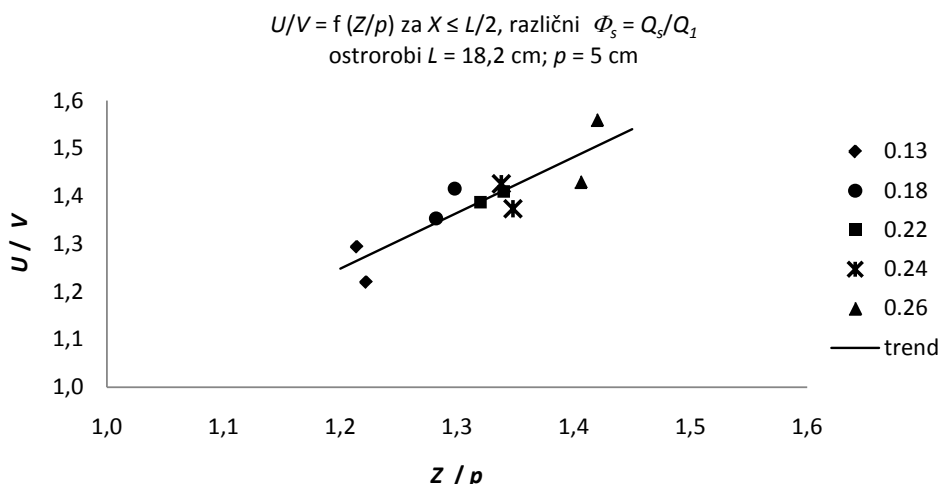


Slika 4: Vektorji hitrosti na $Z_w = 1$ cm, $Q_I = 3$ l/s, $Z_g = 2$ cm. Dimenzije v pikslih.



Slika 5: Vektorji hitrosti na $Z_w = p$, $Q_I = 5$ l/s, $Z_g = 4$ cm. Dimenzije v pikslih.

Slika 4 prikazuje polje hitrosti ob dnu glavnega kanala na območju bočnega preliva pri majhnem dotoku in nizki višini dolvodnega preliva Z_g . Razvidno je, da so hitrosti pretežno enakomerne, usmerjene vzdolž osi, bočni pretok pa je minimalen. Slika 5 pa prikazuje polje hitrosti na višini krone bočnega preliva pri večjem dotoku in višjem prelivu v dolvodnem glavnem kanalu. Razvidno je, da so hitrosti bolj ne-enakomerne, blizu krone odklonjene od vzdolžne osi, bočni pretok pa je opazno večji. Čeprav je curek bočnega odtoka odklonjen od vzdolžne osi kanala, so prevladujoče komponente hitrosti longitudinalne V_x , pri čemer so slednje ob dnu manjše kot na gladini in blizu krone večje kot na delu, ki je bližje nasprotni steni. Vzdolž bočnega preliva hitrosti v glavnem kanalu upadejo zaradi lateralnega odtoka. Nekateri pomembnejši rezultati analiz hitrostnih polj so prikazani sliki 6, ki kaže, da $U > V$ in da točke $U/V = f(Z/p)$ pri različnih razmerjih prelivanja Q_s/Q_I tvorijo trendno linijo. Ta ugotovitev se razlikuje od relacije $U/V = 1,84 = \text{const.}$, ki so jo v postopku za dimenzioniranje bočnih prelivov predpostavili May in sod. [7].



Slika 6. Razmerja hitrosti U/V v odvisnosti od Z/p pri različnih razmerjih $\Phi_s = Q_s/Q_1$

Nadalje se je izkazalo, da se U/V spreminja vzdolž krone bočnega preliva, in sicer: U/V narašča nekako do sredine dolžine krone (tj. do $X = 0,5 L$), na dolvodnem koncu bočnega preliva (približno $X = 0,8 L$) pa se oblikuje zastojna cona, kjer se U/V približa vrednosti 1. Pri konstantnem dotoku povzroči višji Z_g zmanjšanje Q_2 in povečanje Q_s . Zmanjšanje Q_2 pomeni nižje hitrosti V , medtem ko povečanje Q_s pomeni približno enake U , ker se bočni pretok sicer poveča (zaradi tega U naraste), a se tudi odkloni od osi kanala (zaradi tega se U zmanjša). Odtod sledi, da povečanje Z_g povzroči povečanje razmerja U/V .

4.2 Pretočni koeficient

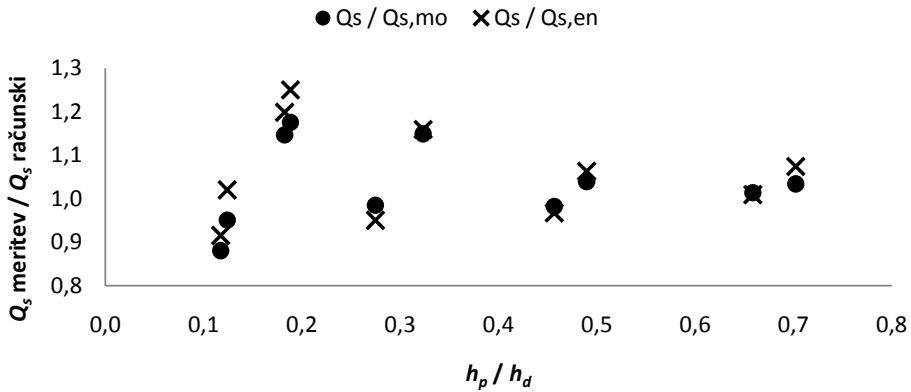
Z ugotovitvijo, da velja $U \neq V$, je bilo zanimivo primerjati merjene in izračunane vrednosti Q_s . Slednje so bile izračunane z uporabo C_d , kot jih podajajo: 1) May in sod. [7], ki upoštevajo geometrijo bočnega preliva (višina p in dolžina L) ter razmere na dolvodnem koncu preliva (globina Z_0 in prelivna višina h_0):

$$C_d = 0,65 - 0,149(h_0/p)^{0,0868}(L/h_0)^{-0,303}(Z_0/p)^{0,149} \quad (1)$$

in 2) Singh in sod. [11], ki upoštevajo razmere gorvodno od bočnega preliva (Froudovo število Fr_1 in globina Z_1):

$$C_d = 0,33 - 0,18Fr_1 + 0,49(p/Z_1) \quad (2)$$

Slika 7 kaže, da dajeta obe enačbi za dane primere (tj. naše meritve) zelo podobne rezultate, označene $Q_{s,mo}$ (tj. May) in $Q_{s,en}$ (tj. Singh), ki so večinoma blizu izmerjenim vrednostim Q_s .



Slika 7: Razmerje med merjenimi in računskimi vrednostmi bočnih pretokov Q_s v odvisnosti od razmerja prelivnih višin h_p/h_d

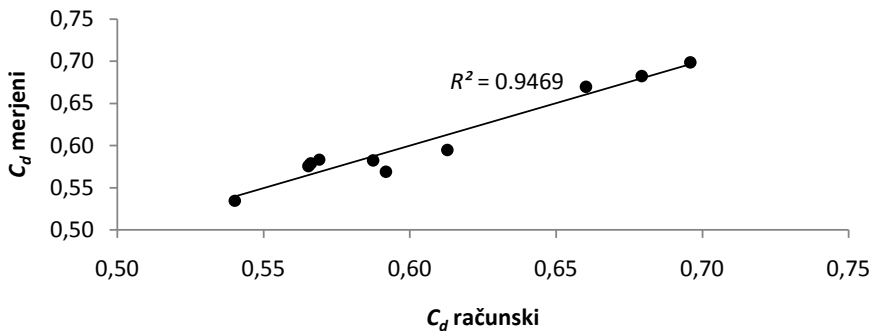
Kot dodaten rezultat eksperimentov lahko formuliramo fenomenološko brezdimenzijsko enačbo pretočnega koeficienta C_d . Če izhajamo iz potenčnega zakona (glej [10]):

$$C_d = K(h_0/p)^{\gamma}(h_2/p)^{\delta}(Z_g/L_g+1)^{\epsilon} \quad (3)$$

lahko na podlagi vnesenih merjenih vrednosti dobimo sistem enačb za neznane eksponente, ga numerično rešimo in nazadnje formuliramo:

$$C_d = 3.911(h_0/p)^{0.825}(h_2/p)^{-2.354}(Z_g/L_g + 1)^{-8.8} \quad (4)$$

Posebnost te enačbe za C_d je v tem, da vključuje vpliv dolvodnega preliva. Slika 8 kaže, da je korelacija med izmerjenimi in po enačbi (4) izračunanimi koeficienti C_d zelo dobra.



Slika 8: Korelacija med merjenimi in izračunanimi vrednostmi pretočnega koeficienta C_d

5 Zaključki

Vizualizacijska metoda, aplicirana na fizičnem hidravličnem modelu bočnega preliva, se je izkazala kot zanesljivo in uporabno orodje za nekontaktno kvantifikacijo hitrostnih polj z veliko prostorsko in časovno ločljivostjo po celotni osvetljeni ravnini (tj. odseku glavnega kanala) naenkrat. Meritve kažejo, da so hitrosti na območju bočnega preliva neenakomerne in da izkazujejo trend, ki je drugačen od v literaturi predpostavljenih vrednosti, poleg tega pa prihaja do tokovnih posebnosti, kakršna je zastojna cona. Predstavljena nova fenomenološka enačba prelivnega koeficienta za razliko od obstoječih zajema vpliv dolvodnega preliva, kar bi lahko bilo uporabno za obravnavo aktualnih problemov, kakršen je npr. visokovodni razbremenilni objekt gorvodno od pregrade JE Krško in/ali blizu bodoče HE Brežice.

Literatura

- [1] Bajcar, T., Širok, B., Eberlinc, M. *Quantification of Flow Kinematics Using Computer-Aided Visualization*. J. Mech. Eng. 55(4), 215-223, 2009
- [2] Borghei, S. M., Jalili, M. R., Ghodsian, M. *Discharge coefficient for sharp- crested side weir in subcritical flow*. J. Hydr. Eng. 125(10), 1051-1056, 1999
- [3] Das, A. *Spatially varied flow over an embankment side weir*. J. Irrig. Drain. Eng. 123(4): 314–317, 1997
- [4] El-Khashab, A., Smith, K. V. H. *Experimental investigation of flow over side weirs*. J. Hydr. Div. 102(9), 1255–1268, 1976
- [5] Hager, W.H., Volkart, P.U. *Distribution channels*. J. Hydr. Eng. 112(10), 935–952, 1986
- [6] Lee, K.-L., Holley, E. R. (2002). *Physical modeling for side-channel weirs*. CRWR Online Report 02-2 [online]. Center for Research in Water Resources, The University of Texas. <http://www.crwr.utexas.edu/reports/pdf/2002/rpt02-02.pdf> (8.3.2011)
- [7] May, R.W.P., Bromwich, B.C., Gasowski, Y., Rickard, C.E. *Hydraulic design of side weirs*. Thomas Telford, London, 2003
- [8] Okamoto, Y., Hanawa, J., Kameoka, T. (1971). *Visualization Techniques of Closed Conduit Flows by Hydrogen Bubble Methods*. Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers 14(76), 1088-1094 [online]. <http://ci.nii.ac.jp/naid/110002360507/> (6.5.2011)
- [9] Pinheiro, A., Silva, I.N. (1999). *Discharge coefficient of side weirs. Experimental study and comparative analysis of different formulas* [online]. <http://www.iahr.org/membersonly/grazproceedings99/doc/000/000/069.htm> (3.5.2011)
- [10] Seber, G.A.F., Lee, A.J. *Linear Regression Analysis*. John Wiley & Sons, Hoboken, 2003
- [11] Singh, R., Manivannan, D., Satyanarayana, T. *Discharge coefficient of rectangular side weirs*. J. Irrig. Drain. Eng. 120(4), 814–819, 1994
- [12] Swamee, P. K., Pathak, S. K., Mohan, M., Agrawal, S. K., Ali, M. S. *Subcritical flow over rectangular side weir*. J. Irrig. Drain. Eng. 120(1), 212–217, 1994
- [13] Tropea, C., Yarin, A.L., Foss, J.F. (Eds.) *Springer Handbook of Experimental Fluid Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, 2007



Numerična simulacija odcepitve toka v nadzvočni konični šobi pri majhnih tlačnih razmerjih šobe

D. Nožak¹, T. Kosel² in F. Kosel³

Numerical simulation of flow separation inside supersonic conical nozzle at low nozzle pressure ratios

Povzetek. V prispevku je predstavljena numerična simulacija nadzvočne konične šobe za različna tlačna razmerja šobe. Točka odcepitve toka je bila določena s pomočjo gradientne metode za lokalno zgostitev mreže. Z metodo končnih elementov smo simulirali osnosimetričen nestacionaren turbulenten tok stisljive viskozne adiabatne tekočine. Uporabili smo standarden $k - \epsilon$ turbulentni model. Rezultati izračuna kažejo dobro ujemanje z objavljenimi empiričnimi in teoretičnimi odcepitvenimi modeli.

Abstract. This paper presents numerical simulation of supersonic conical nozzle for different nozzle pressure ratios. Fluid flow separation was determined with gradient method for local mesh refinement. Axisymmetric transient turbulent flow of compressible viscous adiabatic fluid was simulated with finite element method. Standard $k - \epsilon$ turbulent model was used. Numerical results shows good agreement with published empirical and theoretical separation models.

1 Uvod

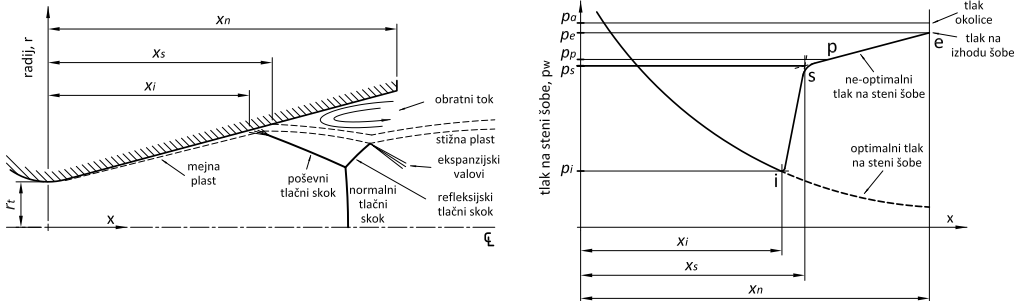
Optimalni pogoji delovanja pri letalskih in raketnih motorjih so doseženi, ko je ob nekem konstrukcijskem tlačnem razmerju šobe, tlak na izhodu šobe p_e enak tlaku okolice p_a . Tlačno razmerje šobe NPR , je razmerje med vstopnim tlakom v šobo p_c in tlakom okolice p_a . Ko je vstopni tlak manjši od konstrukcijskega tlaka, bo v divergentnem delu šobe prišlo do odcepitve toka in zmanjšanja zmogljivosti, [3, 5, 6]. Šobam, kjer se pojavi odcepitev toka v divergentnem delu pravimo nadekspanzijske šobe. Tokovno polje v nadekspanzijski šobi z odcepitvijo toka in pripadajočo tlačno porazdelitvijo na steni divergentnega dela šobe je shematsko prikazano na sliki 1. V primeru, da deluje šoba pri optimalnem razmerju tlaka se tlak na steni šobe zmanjšuje do izhoda. Ko je tlak okolice večji od tlaka na izhodu šobe, se pojavi tlačni skok, preko katerega se tlak v toku poveča na tlak okolice. Zaradi porasta tlaka se mejna plast odebeli in pojavi se

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za Strojništvo, dejan.nozak@fs.uni-lj.si

² Univerza v Ljubljani, Fakulteta za Strojništvo, tadej.kosel@fs.uni-lj.si

³ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za Strojništvo, franc.kosel@fs.uni-lj.si

poševni tlačni skok, ki sega globoko v mejno plast, [6]. Med odcepljenim tokom in steno šobe tlačna razlika povzroči obratni tok.

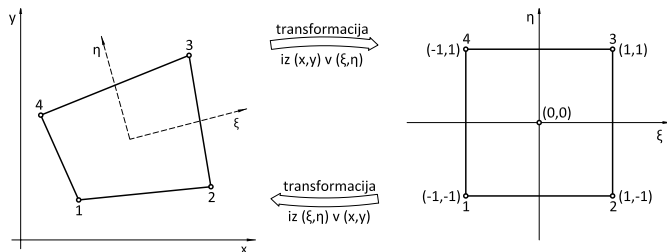


Slika 1 : Tlačni skoki in porazdelitev tlaka v nadekspanzijski konični šobi.

V tem prispevku je predstavljena osnosimetrična simulacija majhne nadzvočne konične šobe z metodo končnih elementov pri tlačnih razmerjih, ki so bistveno manjša od konstruiranega tlačnega razmerja. Z uporabo lokalne zgostitve mreže na podlagi gradientov tokovnih spremenljivk, [4, 7], bodo določeni pogoji pri katerih pride do odcepitve toka. Dobljene rezultate bomo primerjali z empiričnimi in teoretičnimi odcepitvenimi modeli ter z rezultati na fini mreži.

2 Lokalna zgostitev mreže

Pri numeričnih simulacijah nadzvočnega toka je potrebno na mestih, kjer se pojavijo normalni in poševni tlačni skoki, lokalno zgostiti število elementov, da zagotovimo ustrezno natančnost rezultatov. Praviloma ne vemo kje se bo tvoril tlačni skok, da bi na tistem mestu dodatno zgostili elemente. Ideja je, da lokacijo zgostitve elementov mreže poiščemo z gradienti tokovnih spremenljivk, kot so npr. tlak, hitrost, gostota.



Slika 2 : Prikaz transformacije končnega elementa.

V ta namen računsko domeno diskretiziramo s končnim številom elementov v fizikalnem prostoru (x, y) . Računanje vozliščnih vrednosti elementa poteka v lokalnem prostoru (ξ, η) , slika 2. Vrednost gradienta določimo za težišče elementa v lokalnem prostoru in preko transformacije tudi v fizikalnem prostoru. Enačbi, ki izražata odvode tokovnih spremenljivk f v fizikalnem prostoru z odvodi tokovnih spremenljivk v lokalnem prostoru sta, [1]:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{J} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \right] \quad \text{in} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{J} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \right], \quad (1)$$

kjer je J Jacobijeva determinanta:

$$J \equiv \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Parcialne odvode, ki nastopajo v zgornjih enačbah, določimo s pomočjo oblikovne funkcije za bilinearen štirivozliščni dvodimenzionalen element, [2]:

$$N = \frac{1}{4} \left[g_1(1-\xi)(1-\eta) + g_2(1+\xi)(1-\eta) + g_3(1+\xi)(1+\eta) + g_4(1-\xi)(1+\eta) \right], \quad (3)$$

kjer so g_1 , g_2 , g_3 in g_4 vozliščne vrednosti poljubne tokovne spremenljivke f ter vrednosti koordinat x in y posameznih vozlišč elementa. Z odvajanjem enačbe oblikovne funkcije po obeh lokalnih koordinatah ξ in η dobimo potrebne parcialne odvode v težišču elementa. Končni izraz za gradient tokovne spremenljivke v težišču elementa izražene z vozliščnimi vrednostmi elementa v smeri x in y je, [4]:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_1(y_2 - y_4) - f_2(y_1 - y_3) - f_3(y_2 - y_4) + f_4(y_1 - y_3)}{x_1(y_2 - y_4) - x_2(y_1 - y_3) - x_3(y_2 - y_4) + x_4(y_1 - y_3)}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-f_1(x_2 - x_4) + f_2(x_1 - x_3) + f_3(x_2 - x_4) - f_4(x_1 - x_3)}{x_1(y_2 - y_4) - x_2(y_1 - y_3) - x_3(y_2 - y_4) + x_4(y_1 - y_3)}. \quad (5)$$

Velikost gradienta poljubne tokovne spremenljivke v težišču končnega elementa je:

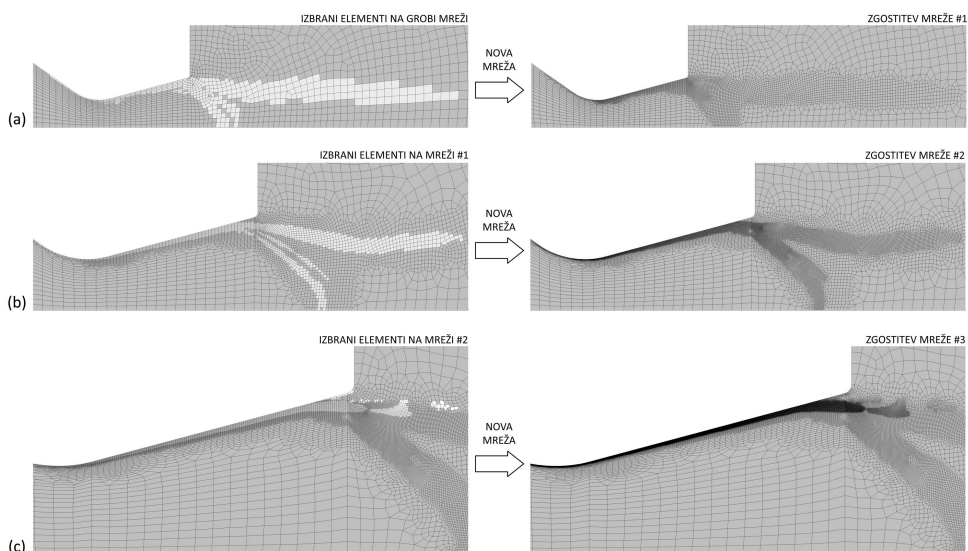
$$GR_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \quad (6)$$

in nam služi za določitev cenilke s katero izbiramo potrebne elemente za lokalno zgostitev. Cenilka C_{OT} , ki predstavlja merilo za izbor elementov z največjim gradientom, definiramo kot produkt velikosti gradienta poljubne tokovne spremenljivke in karakteristične dolžine l_{OT} , [4]:

$$C_{OT} = GR_f l_{OT}, \quad (7)$$

kjer je za osnosimetrični tok $l_{OT} = \sqrt[3]{r_e A_e}$. Radij r_e je razdalja od osi simetrije do težišča elementa in A_e površina elementa. Z dano cenilko zagotovimo zgostitev mreže na elementih z velikim gradientom in veliko površino. V izbor za lokalno zgostitev mreže pridejo elementi z največjo vrednostjo cenilke. Število teh elementov določimo glede na število vseh elementov. V izbor se ponavadi vključi od 5% do 20% vseh elementov.

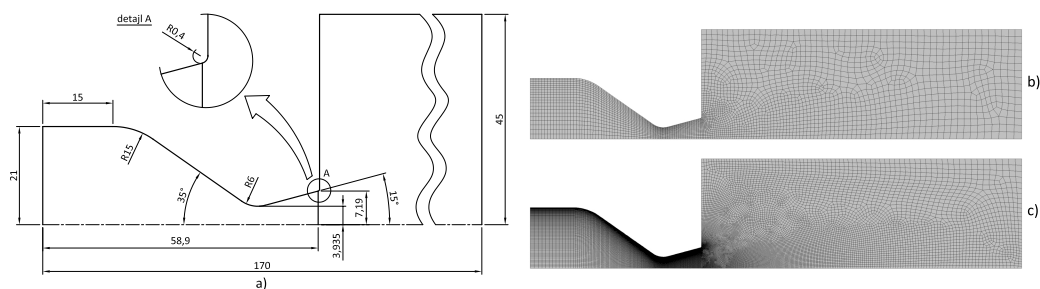
Na sliki 3 je prikazano delovanje gradientne metode za lokalno zgostitev mreže na primeru nadzvočne konične šobe pri $NPR = 6$. Prikazane so tri lokalne zgostitve mreže. Na sliki 3(a) levo je podana groba mreža z $N_G = 3138$ elementi na kateri poteka prvi izračun z 10% izbranih elementov za lokalno zgostitev mreže. Rezultat je mreža s prvo lokalno zgostitvijo z $N_{Z1} = 6493$ elementi, slika 3(a) desno. Po ponovnem izračunu smo izbrali 15% vseh elementov za lokalno zgostitev, slika 3(b) levo. Rezultat je mreža z drugo lokalno zgostitvijo z $N_{Z2} = 16969$ elementi, slika 3(b) desno. Za tretjo lokalno zgostitev smo izbrali 20% vseh elementov in dobili mrežo z $N_{Z3} = 39874$ elementi, slika 3(c) desno. Z izbrano cenilko in ustrezno izbiro tokovne spremenljivke za izračun gradienta zagotovimo bistveno več elementov v mejni plasti, kjer pričakujemo odcepitev toka ter na sami lokaciji poševnega in normalnega tlačnega skoka.



Slika 3 : Potek lokalne zgostitve v nadzvočni konični šobi za $NPR = 6$.

3 Numerična simulacija

Za numerične simulacije smo uporabili programski paket Ansys 11.0. v katerega smo implementirali gradientno metodo za lokalno zgostitev mreže. Simulacija je bila izvedena z metodo končnih elementov za nestacionaren turbulenten osnosimetričen tok stisljive viskozne adiabatne tekočine. Uporabili smo standarden $k - \epsilon$ turbulentni model.



Slika 4 : (a) računska domena, (b) osnovna groba mreža z $N_G = 3138$ elementi in (c) fina mreža z $N_F = 40963$ elementi.

Računska domena, slika 4(a), je bila zmrežena s štiri vozliščnimi dvodimenzionalnimi končnimi elementi. Za izračun smo pripravili dve mreži: grobo, slika 4(b), in fino, slika 4(c). Groba mreža je služila kot izhodišče za uporabo gradientne metode lokalne zgostitve mreže. Uporabili smo tri lokalne zgostitve mreže. Za primerjavo smo naredili simulacije na fini mreži. Število elementov pri fini mreži je bilo približno enako številu elementov v zadnjem koraku lokalne zgostitve mreže. Na vstopu v računsko domeno smo predpisali vstopni tlak p_c , ki smo ga spreminjali od $p_c = 0.2 \text{ MPa}$ do $p_c = 0.8 \text{ MPa}$ in temperaturo $T_c = 2893 \text{ K}$. Na mejah zunanjega prostora

smo predpisali konstanten tlak okolice $p_a=1000$ hPa. Stene šobe smo obravnavali kot adiabatno steno. Zaradi osnosimetričnosti šobe smo upoštevali simetrijski robni pogoj. Turbulentna intenzivnost na vstopu je bila 1%.

Začetna vrednost časovnega koraka pri izračunih je bila $5 \cdot 10^{-2}$ s zaradi majhne hitrosti plina na začetku izračunov. Med samim izračunom je bilo potrebno časovni korak postopoma zmanjševati do $5 \cdot 10^{-12}$ s zaradi vedno večjih hitrosti plina. Stabilnost in konvergenčnost izračunov je bila izboljšana z uvedbo umetne viskoznosti, ki pa je bila tekom izračuna postopoma umaknjena iz izračuna. Izračuni so bili prekinjeni, ko je bila razlika v hitrostih in tlaku reda 10^{-6} .

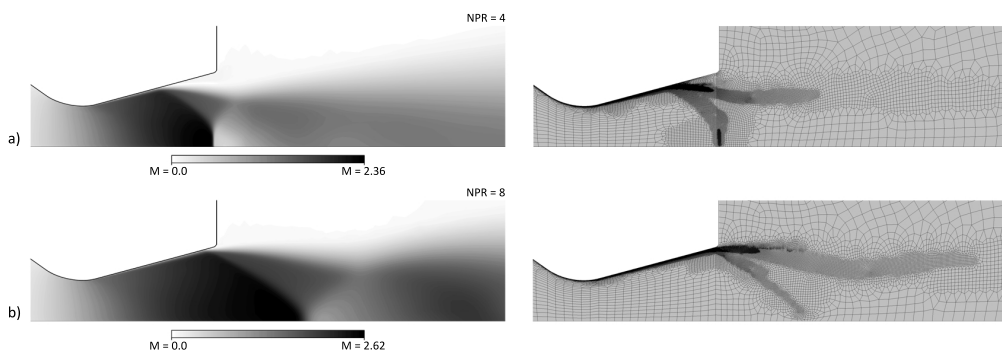
4 Rezultati in diskusija

Izračuni so bili narejeni za tlačna razmerja šobe od $NPR = 2$ do $NPR = 8$ v koraku po 1. Ker so ta tlačna razmerja veliko manjša od konstruiranega tlačnega razmerja $NPR = 16$, lahko pričakujemo, da se bo v divergentnem delu šobe pojavila odcepitev toka. Za vsak NPR je bil izračun opravljen na petih mrežah: grobi in fini ter treh lokalnih zgostitvah.

Za prvi dve lokalni zgostitvi smo uporabili za cenilko gradient totalnega tlaka na 10% in 15% vseh elementov. Izbira totalnega tlaka za cenilko nam zagotovi mreženje tako v tlačnem skoku, kot v mejni plasti. Za tretjo lokalno zgostitev smo za cenilko uporabili gradient hitrosti na 20% vseh elementov. Na ta način smo zagotovili mreženje skoraj izključno v mejni plasti.

Vrednost stenskega parametra y^+ v divergentnem delu šobe se je spreminjala od gostote mreže in od NPR . Pri $NPR = 2$ je bila vrednost med $5 < y^+ < 15$ na grobi mreži, medtem ko je bila na mreži s tretjo lokalno zgostitvijo v povprečju med $1 < y^+ < 3$. Pri $NPR = 8$ je bila vrednost na grobi mreži med $20 < y^+ < 55$, medtem ko je bila na mreži s tretjo lokalno zgostitvijo v povprečju med $1 < y^+ < 2$.

4.1 Machovo število in mreža



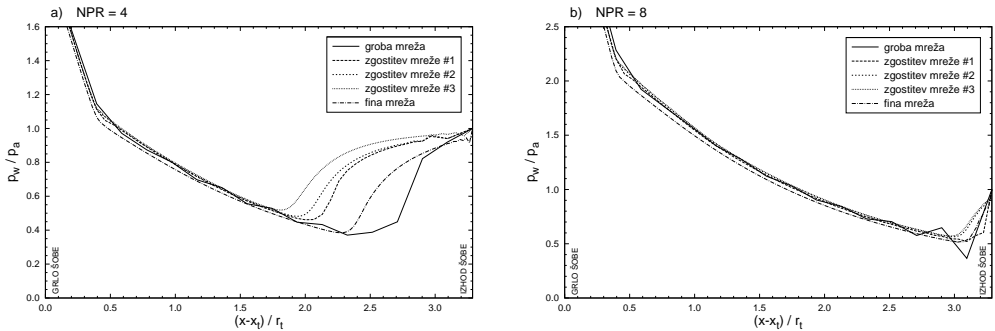
Slika 5 : Porazdelitev Machovega števila na mreži s tretjo lokalno zgostitvijo pri (a) $NPR = 4$ in (b) $NPR = 8$.

Porazdelitev Machovega števila in pripadajoča mreža tretje lokalne zgostitve je za $NPR = 4$ in $NPR = 8$ prikazana na sliki 5. Z naraščanjem NPR se odcepitev toka premika proti izhodu šobe. Po odcepitvi toka se v obeh primerih pojavi poševni tlačni skok, ki je pod kotom približno 50° glede na steno divergentnega dela šobe usmerjen proti osi šobe. To je opazno kot izrazita ločnica med črnim in sivim področjem na sliki 5 levo ali kot pas poševne zgostitve mreže na

sliki 5 desno. Za $NPR = 4$, na simetrijski osi pri izhodu šobe, Machovo število sunkovito pade, $M < 1$. To je normalni tlačni skok, ki se opazi tudi kot močna zgostitev mreže na istem mestu, slika 5(a) levo in desno. Za $NPR = 8$ se normalni tlačni skok ne pojavi, ker je $M > 1$.

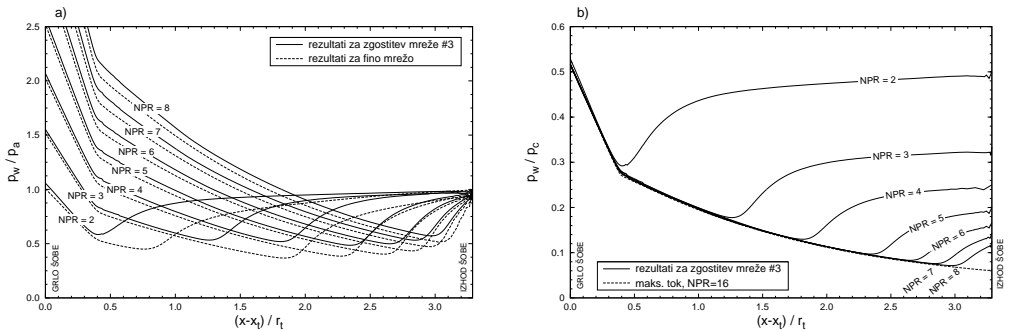
4.2 Tlak na steni šobe

Porazdelitev tlaka na steni divergentnega dela šobe za $NPR = 4$ in $NPR = 8$ je predstavljena na sliki 6. Tlak na steni šobe je normiran s tlakom okolice p_a . Dolžina divergentnega dela je podana v brezdimenzijski obliki glede na radij grla šobe r_t . Z večanjem števila lokalnih zgostitev mrež se točka minimalnega tlaka pomika v notranjost šobe. Razlike med mrežami so vedno manjše, kar kaže na konvergentnost rezultatov. Za $NPR = 8$ se pri grobi mreži pojavi nihanje v vrednosti tlaka blizu izhoda šobe. Razlog je v vplivu robnega pogoja tlaka okolice.



Slika 6 : Porazdelitev tlaka na steni šobe za (a) $NPR = 4$ in (b) $NPR = 8$.

Na sliki 7(a) je predstavljena porazdelitev tlaka na steni šobe za tretjo lokalno zgostitev mreže in fino mrežo pri vseh NPR . V vseh primerih se vrednosti minimalnega tlaka p_i na fini mreži ne ujemajo z vrednostmi na tretji zgostitveni mreži. Razlog je v slabšem popisu mejne plasti na fini mreži, zaradi premajhnega števila elementov. Z normiranjem tlaka na steni šobe p_w s tlakom na vstopu v šobo p_c dobimo zanimivo odvisnost, slika 7(b). Pri različnih NPR je dano razmerje skoraj enakih vrednosti, vendar le do minimalnih vrednosti tlaka pri danem NPR .

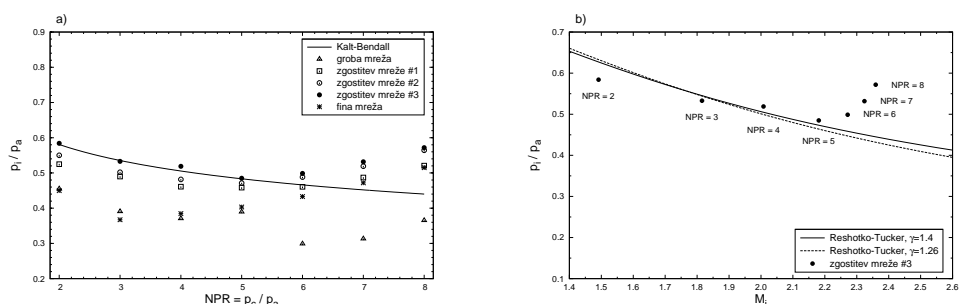


Slika 7 : (a) tlak na steni šobe normiran s tlakom okolice in (b) tlak na steni šobe normiran z vstopnim tlakom šobe.

4.3 Primerjava z odcepitvenimi modeli

Ker je porazdelitev tlaka na steni šobe odvisna od mreže, je na sliki 8(a) prikazana primerjava med izračunanimi vrednostmi minimalnega tlaka na steni šobe p_i in empiričnim odcepitvenim modelom Kalt-Bendall v odvisnosti od NPR . Ta model temelji na izmerjenih podatkih koničnih raketnih motorjev na trdo in tekoče gorivo, [6]. Zaradi termodinamičnih lastnosti plina in geometrije šobe je ta model primeren za primerjavo. Rezultati dobljeni na grobi in fini mreži kažejo veliko odstopanje z izbranim modelom. Z večanjem števila zgostitev se približujemo vrednostim, ki jih predpisuje izbran odcepitveni model. Rezultati na mreži s tretjo lokalno zgostitvijo se dobro ujemajo z modelom vse do $NPR = 5$, kjer je relativna napaka e_r v območju od -0.5% do $+2.6\%$. Z nadaljnim večanjem NPR se napaka povečuje zaradi posledice končnosti šobe, ki jo odcepitveni model ne upošteva. Pri $NPR = 8$ je $e_r = +23.0\%$.

Vrednost minimalnega tlaka na tretji zgostitveni mreži v odvisnosti od Machovega števila na mestu minimalnega tlaka je prikazana na sliki 8(b) skupaj s teoretičnim odcepitvenim modelom Reshotko-Tucker, [6]. Do vključno $NPR = 5$ je ujemanje z modelom dobro, nakar sledi večje odstopanje zaradi končnosti šobe. V prikazanem območju je vpliv razmerja specifičnih toplot $\gamma = 1.4$ in $\gamma = 1.26$ zelo majhen na velikost minimalnega tlaka.



Slika 8 : (a) Primerjava izračunanih vrednosti p_i/p_a z empiričnim modelom Kalt-Bendall in (b) p_i/p_a na tretji zgostitveni mreži s teoretičnim modelom Reshotko-Tucker.

4.4 Točka odcepitev in potisna sila

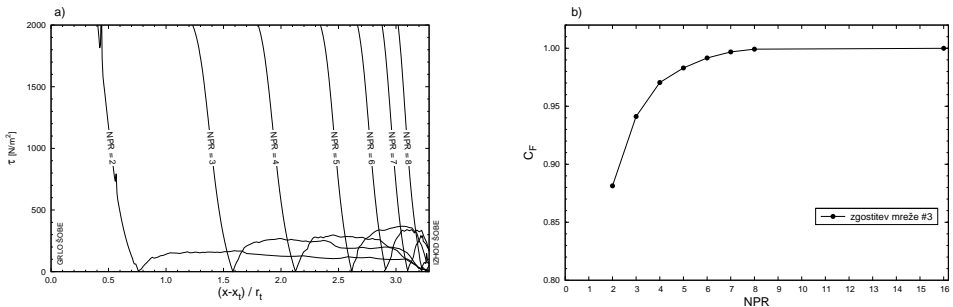
S primerjavo izračunanih rezultatov z odcepitvenim modelom Kalt-Bendall smo ugotovili, da so merodajni rezultati na tretji zgostitveni mreži. Na sliki 9(a) je prikazana strižna napetost na steni divergentnega dela šobe. Povsod kjer je vrednost $\tau = 0$, je nastopila odcepitev mejne plasti od stene šobe x_s . Z večanjem NPR se odcepitev toka seli proti izhodu šobe. Za $NPR = 8$ se odcepitev pojavi tik pred izhodom šobe. Majhno povečanje vrednosti strižne napetosti po odcepitvi je posledica povratnega toka, ki se pojavi po odcepitvi toka.

Odcepitev toka in povratni tok povzroči zmanjšanje potisne sile, ki je določeno s koeficientom potisne sile C_F , [5]:

$$C_F = 1 - \frac{F_{PT}}{\dot{m}v_d} \text{ in } F_{PT} = \int_d^e (p - p_a) \sin \alpha dA, \quad (8)$$

kjer je F_{PT} sila zaradi povratnega toka od odcepitev d do izhoda e , \dot{m} masni tok, v_d hitrost idelanega toka na mestu odcepitev d in α polkot šobe. Zmanjšanje potisne sile pri različnih

NPR za tretjo zgostitev mreže je prikazana na sliki 9(b). Pri $NPR = 2$ je izguba približno 12%. Z naraščanjem NPR je zmanjšanje potisne sile manjše, saj je vplivno območje povratnega toka vedno manjše.



Slika 9 : (a) Strižna napetost na steni šobe in (b) koeficient C_F za vse NPR pri tretji zgostitvi.

5 Sklep

Odcepitev toka v nadzvočni konični šobi smo obravnavali na primeru raketne šobe pri majhnih tlačnih razmerjih šobe. Z metodo končnih elementov in lokalne zgostitve mreže smo simulirali nestacionaren turbulenten tok stisljive viskozne adiabatne tekočine s standardnim $k - \epsilon$ turbulentnim modelom. Z uporabo kombinacije totalnega tlaka in hitrosti, kot tokovnih spremenljivk za določitev največjih gradientov dosežemo zgostitev mreže v mejni plasti in tlačnih skokih. Primerjava z empiričnim in teoretičnim odcepitvenim modelom je pokazala dobro ujemanje o napovedi odcepitve toka za tretjo lokalno zgostitev. Odcepitev toka povzroči zmanjšanje potisne sile, ki je lahko zelo veliko za majhna tlačna razmerja šobe.

Literatura

- [1] J. D. Anderson, *Computational Fluid Dynamics: the Basics with Applications*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1995.
- [2] C. Hirsch, *Numerical Computation of Internal and External Flow: Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*, 2nd edition, Elsevier, Oxford, 2007.
- [3] F. Nasuti in M. Onofri, *Shock structure in separated nozzle flows*, Shock Waves, 19, 229–237, 2009.
- [4] D. Nožak, *Odcepitev toka v nadzvočni konični šobi*, magistrsko delo, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 2011.
- [5] D. Papamoschou, A. Zill in A. Johnson, *Supersonic flow separation in planar nozzles*, Shock Waves, 19, 171–183, 2009.
- [6] R. H. Schmucker, *Status of flow separation prediction in liquid propellant rocket nozzle*, NASA TM X-64890, Marshall Space Flight Center, Alabama, 1974.
- [7] V. Šajn, D. Nožak, T. Kosel in F. Kosel, *Gradient method for mesh refinement in compressible fluid flow simulations*, Airc. Eng. and Aero. Techn., 79, 3, 254–260, 2007.



Samodejno spreminjanje računske mreže na primeru toka fluida preko stopnice

I. Petrović¹, V. Šajn¹ in F. Kosel¹

Adaptive Mesh Refinement on backward facing step flow

Povzetek. V prispevku je predstavljena ideja za vpeljavo spreminjajočih računskih mrež pri numerični simulaciji turbulentnega toka fluida. Opisan je postopek izvedbe premreževanja in predstavljeni dejavniki, ki na metodo vplivajo. Na koncu je predstavljen primer uporabe metode na toku fluida preko stopnice, kjer so podani rezultati in razprava.

Abstract. The idea of using self-adaptive mesh refinement in numerical simulations of turbulent fluid flow is presented. Algorithm for mesh refinement is described, along with some of the factors of influence on the method. At the end, test case of fluid flow over backward facing step is calculated and the results are discussed.

1 Uvod

Pri numeričnih simulacijah tokov ima poleg izbire fizikalno-matematičnega modela problema z zanemaritvami, metode reševanja vodilnih diferencialnih enačb, vrste časovne diskretizacije in ostalih parametrov, velik vpliv tudi računska mreža. Ideja ki smo jo želeli razviti je bila, da bi s spremembo porazdelitve mreže dobili natančnejše rezultate izračunov, ki bi se boljše ujemali z eksperimentalnimi vrednostmi, podobno kot je bilo to storjeno v [8],[2], [4].

Največji problem pri modeliranju turbulentnega toka, nam predstavlja izračun Reynoldsovega napetostnega tenzorja ($\tilde{\tau}_{ijT}$)

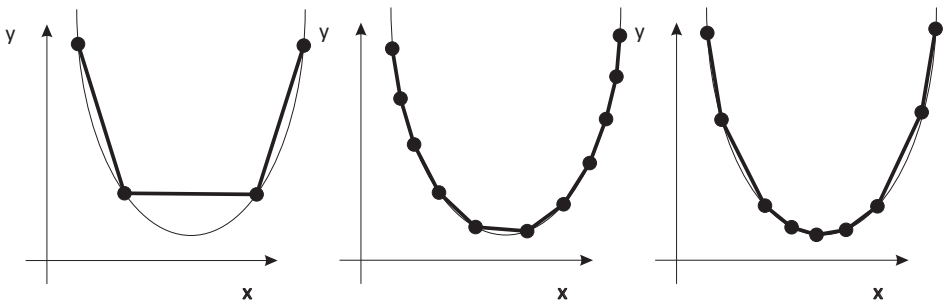
$$\tilde{\tau}_{ijT} = -\rho_0 \begin{bmatrix} \widetilde{v'_x v'_x} & \widetilde{v'_x v'_y} & \widetilde{v'_x v'_z} \\ \widetilde{v'_y v'_x} & \widetilde{v'_y v'_y} & \widetilde{v'_y v'_z} \\ \widetilde{v'_z v'_x} & \widetilde{v'_z v'_y} & \widetilde{v'_z v'_z} \end{bmatrix} = -\rho_0 \widetilde{v'_i v'_j}, \quad (1)$$

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

ki je v večini turbulentnih modelih aproksimiran z Boussinesquovo aproksimacijo [9]

$$-\widetilde{v'_i v'_j} = \nu_T \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k. \quad (2)$$

Zato da bi ga čim boljše numerično izračunali, ob privzeti uporabi enakih fizikalnih modelov, bi potrebovali tudi čim manjšo razdaljo med računskimi točkami v mreži. Če to želimo, potrebujemo veliko računskih točk, kar nam posledično poveča potrebo po računalniški zmogljivosti. Ideja ki jo želimo razviti je, da bi mrežo zgostili samo na mestih, kjer se pojavi največja napaka. S spreminjanjem računske mreže, želimo zmanjšati napako pri modeliranju turbulentnega toka, kot je to prikazano na sliki 1.



(a) Velik razmak med vozlišči

(b) Majhen razmak

(c) Spremenljiv razmak

Slika 1 : Vpliv izbire računskih točk na ujemanje interpolacijske funkcije s funkcijo, katero popisuje na 2D primeru [7]

Algoritem za izvedbo ideje je sestavljen iz sledečih korakov: uporabnik izdela geometrijski model in določi začetno grobo mrežo, na kateri se izvrši izračun vodilnih enačb. Nato se izbere celice, katere bo potrebno spremeniti in jih po potrebi spremeni. Prejšnja rešitev je projicirana na novo mrežo in uporabljena kot nov začetni približek. Če so nove rešitve znotraj postavljenega kriterija natančnosti, je ta rešitev končna, sicer se znova oceni katere celice je potrebno spremeniti in se postopek ponovi, do dosege zaključnega kriterija.

2 Izbira celic in način premreževanja

Mrežo lahko optimiramo na različne načine: minimalna napaka pri danem številu elementov, minimalno število vozlišč pri dani napaki ali minimalni čas pri doseganju dane napake. Aplikativno je najzanimivejši zadnji primer, kjer je optimalna mreža taka, ki zadostno zadovolji pogoje napake in izračuna enačbe v minimalnem času.

Izberemo si lahko več načinov, s katerimi bomo izbrali celice, ki jih je potrebno premrežiti: glede na oceno napake v računskih točkah, ali pa postavimo neko cenilno funkcijo ki celicam ali točkam pripiše cenilno vrednost.

Napake lahko ocenimo na različne načine. Najboljša ocena napake, s katero bi lahko prišli do algoritma za samodejno prilagoditveno premreževanje, bi bila *a priori* ocena. Ta temelji na oceni

diskretizacijske napake iz strukture mreže in se jo izračuna še pred numeričnim izračunom. Ta način je zahteven in omejen na enostavne modele [6].

Novejša je ideja o uporabi *a – posteriori error estimate* oziroma izračuna ocene napake iz dobljenih rešitev [1]. Za ocene napak lahko uporabimo različne vrste napak (modelne, diskretizacijske, iteracijske), ki za izračun uporabijo različne pristope [4].

Ocenjevanje s cenilnimi funkcijami, vsaki celici pripiše cenilno vrednost. Celice so nato razvrščene in pomrežene glede na to vrednost. Takšne cenilne funkcije, so lahko različne vrednosti osnovnih veličin, njihovi odvodi, velikost energije, ...

Pri izbiri različnih cenilk, ki bi mrežo zgostile na potrebnem območju, si lahko pomagamo tudi s površinskimi utežmi. Večje celice prispevajo večji delež k globalni napaki, kot enaka napaka v manjši celici. Slaba stran tega je, da ta faktor omeji razmerje največjih celic proti najmanjšim, kar lahko pripelje do premreževanja v celicah, kjer dodatna delitev ni potrebna.

Ko so celice katere je potrebno spremeniti določene, jih je potrebno premrežiti. V splošnem poznamo tri različne skupine glede na način premreževanja: *h*, *r* in *p* premreževanje.

Pri tipu *h*, so v mrežo vstavljene dodatne računske točke, kjer je potrebno premreževanje. Točke so lahko vstavljene na staro mrežo ali pa je ustvarjena nova mreža, ki je prilepljena preko stare in predstavlja novo plast. Možno je tudi združevanje elementov, kjer ni potrebno, da so tako majhni. Število računskih točk se tako spremeni.

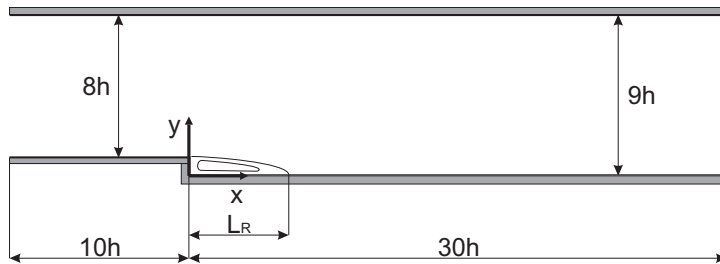
Druga vrsta premreževanja tipa *r*, ohrani število točk in jih zgolj prerazporedi glede na porazdelitev napake. Struktura mreže se ohrani vendar je problem, ker ne vemo ali bomo s tem številom vozlišč dosegli želeno natančnost. Na mestih, kjer je potrebna velika sprememba mreže, lahko pride do občutnega poslabšanja kvalitete mreže.

Zadnja metoda vrste *p*, uporablja oblikovne funkcije višjega reda na področjih z večjo numerično napako. Uporabna je pri metodi končnih elementov. Zaradi višjega reda potrebujemo še dodatne povezovalne enačbe da zapremo sistem in je zato potrebna bistveno večja računalniška moč.

3 Primer toka fluida preko stopnice

Za primer kjer bi algoritem razvili in preizkusili, smo si izbrali standardni testni primer računskih postopkov in turbulentnih modelov: turbulentni tok fluida preko stopnice. Primer je dovolj enostaven glede določitve točke odcepitve in hkrati dovolj kompleksen za primerjavo numeričnih rezultatov z eksperimentalnimi (profili hitrosti, recirkulacijska dolžina).

Eksperimentalne podatke smo dobili iz literature [3]. Glede na eksperiment smo izbrali geometrijo modela, kot jo prikazuje slika 2. Vstopni kanal je dolg $8 \cdot h$, kjer je $h = 0,0127m$, izstopni pa $30 \cdot h$. Višina vstopnega kanala je $8 \cdot h$, višina stopnice pa h . Uporabili so veliko razmerje med širino vetrovnika proti višini stopnice (12:1), da se zmanjša 3D efekt v točki separacije. Izbrano je majhno razširitveno razmerje med izstopno in vstopno višino kanala $(h_{vstop} + h)/h_{vstop} = 1,125$, da se zmanjša porast tlačnega gradienta zaradi nenadne razširitve. Dolžina L_R predstavlja recirkulacijsko dolžino, to je tista dolžina, kjer se tok po tem, ko se odcepi od stene (v točki odcepitve), znova pritrdi na steno. Levo od te točke je območje povratnega toka.



Slika 2 : Izbrana geometrija numeričnega modela

Kot obtekajoči fluid smo izbral zrak. Referenčna hitrost fluida je $v_0 = 44,2 \text{ m/s}$, kar nam da vrednost Reynoldsovega števila izračunanega na podlagi višine stopnice $Re = \frac{v \cdot h}{\nu} \approx 38.000$. Modelirali smo stacionaren, nestisljiv, turbulentni tok, s konstantno temperaturo.

Robni pogoj na vstopni višini kanala, je hitrost v y smeri $v_y = 0$, hitrost v x smeri smo popisali s približkom razvitega turbulentnega profila hitrosti. Ker je bil to približek, smo vstopni kanal podaljšali toliko, da se je pred stopnico profil dokončno razvil. Na stenah kanala smo predpisali mirovanje fluida. Da bi se tok po motnji lahko razvil, smo postavili dolg izstopni kanal in predpisali, da na izstopu iz kanala ni nadtlača $p^n = 0$, prečna hitrost pa je $v_y = 0$.

Za izračun problema smo uporabili Reynoldsove časovno povprečene enačbe, ki smo jih zaprli z dvoenačbnim $k - \varepsilon$ turbulentnim modelom. Ta model dobro opiše razvit turbulentni tok, kjer prevladujejo vztrajnostne sile nad viskozni in ima probleme pri popisu plasti ob steni, ki je pri napovedi recirkulacijske dolžine ključna [5]. Model je slab tudi pri problemih s pozitivnim tlačnim gradientom, kot je to pri nas [11]. Po [10] naj bi ta model v primeru toka preko stopnice deloval dobro, v kolikor je resolucija mreže primerna. Ta model smo izbrali, ker smo želeli doseči izboljšanje rezultatov, kot posledica premreževanja in ne uporabe boljših modelov.

Z izbiro programa (ANSYS ®) smo se odločili za metodo končnih elementov. Uporabili smo 4 vozliščni končni element, ki ima v vsakem vozlišču predpisanih 7 prostostnih stopenj: $v_x, v_y, v_z, p, T, k, \varepsilon$. Ker v našem primeru nimamo spremembe temperature in problem obravnavamo 2D, je neznank samo 5.

Kot cenilko, ki nam določi elemente za premrežiti, smo na podlagi opazovanj izbrali cenilko z rotorjem hitrosti. Primerjali smo še cenilke sestavljene iz gradienta hitrosti in tlaka, vendar se je rotor izkazal kot najboljši. Ta ima veliko vrednost v elementih z veliko vrtinčnostjo, kjer se po teoriji Kolmogorova prenaša energija na manjše skale, do disipacijske.

Uporabili smo še utežni faktor glede na velikost elementa - koren iz površine elementa $\sqrt{A_e}$, kar nam predstavlja karakteristično dolžino elementa. Da ne bi prišlo do pretiranega manjšanja elementov ob steni, kjer smo uporabili standardno stensko funkcijo z logaritmičnim profilom, smo vse robne elemente obtežili. Cenilna funkcija C , je tako izražena kot

$$C = \left| \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right| \cdot \sqrt{A_e}. \quad (3)$$

Vrednosti parcialnih odvodov hitrosti v določeni smeri v težišču elementa, smo izračunali s pomočjo zapisa odvoda v naravnih koordinatah, transformiranih v globalne, kot je to storjeno

v [8]. Vsakemu elementu izračunamo oblikovne funkcije v naravnih koordinatah, ki popisujejo vrednosti spremenljivke (v našem primeru hitrosti) ter globalni koordinati x in y , ki jih nato parcialno odvajamo po naravnih koordinatah. Ko to transformiramo v globalni koordinatni sistem, dobimo velikosti parcialnih odvodov v težišču štiristranega elementa, izražene z vozliščnimi vrednostmi v elementu [7].

Ko imamo izračunane vrednosti cenilk, je potrebno določiti indeks premreženja. Uporabimo lahko metodo on/off, ki enakomerno premreži vse elemente katerih vrednost cenilke je pogojena s kriterijem. Drugačen je stohastični pristop, kjer razdelimo celice z napako večjo od dopustne v tri stopnje premreževanja. Tiste z večjo vrednostjo cenilne funkcije oz. napako bolj zmanjšamo, kot tiste z manjšo vrednostjo. Lahko uporabimo determinističen pristop, kjer določimo npr. razmerje med cenilno funkcijo na elementu in najdaljšo stranico [6]. Uporabili smo metodo on/off.

Kot kriterij koliko elementov moramo premrežiti, smo podali odstotek premreženih elementov. Ta je bil po prvi iteraciji 5% in po zadnji, 5. iteraciji 10%. Odstotek smo povečevali ker smo pričakovali, da bo prva rešitev najbolj približna in zadnja najnatančnejša. Po vsakem premreženju je sledilo ponovno računanje, kjer smo nadaljevali z delnimi rezultati iz prejšnjega računanja in znova premreženje, dokler nismo izpolnili kriterijev ki smo jih določili. Pogoji za potrebno konvergenco so: 10^{-12} za p , 10^{-5} za v_x , v_y , k in ϵ .

Izbrali smo h tip premreževanja in povečevali število računskih točk, ki so bile vključene v prvotno mrežo. S tem se uniči lokalna homogenost togostne mreže, vendar bi pri postavitvi novih plasti mrež preko obstoječih, veliko časa zahteval algoritem za prenašanje informacij iz točk bolj goste mreže na točke osnovne mreže. Nove točke so nastale z delitvijo stranic izbranega elementa na polovico.

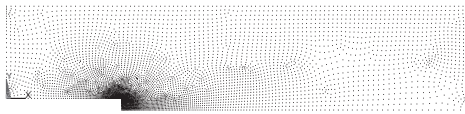
4 Rezultati

Najprej smo z elementi izdelali osnovno mrežo (slika 3(a)), ki je zgoščena na mestih kjer pričakujemo probleme pri računanju, vendar z manjšim številom elementov (5429). Sledil je algoritem za samodejno spreminjanje mreže, ki nam je mrežo zgostil, kot je opisano zgoraj. Končno število elementov je bilo 12020 in je primerljivo z modelom bolj goste mreže (16754 elementov), ki smo ga uporabili kot primerjalni model.

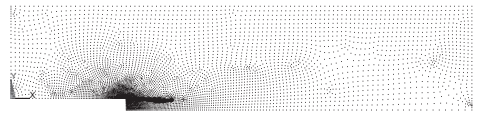
Slike vozlišč po premreževanjih, so prikazane na sliki 3, slike primerjalnega modela pa na sliki 4.

Ob prvem premreženju, se mreža zgosti ob robovih vstopnega kanala ter okrog točke separacije. Nato se vozlišča zgostijo v coni, kjer je rotor hitrosti največji. Ker je toliko elementov že premreženih in so cenilke drugod velike, velikost premreženih elementov pa je pol manjša, se v sliki 3(c) in 3(d) kaže mreženje tudi drugih con. V zadnji sliki se premreži tudi plast ob steni, ne glede na to, da smo jo obtežili z utežnim faktorjem. Izbrane parametre bi bilo potrebno izboljšati.

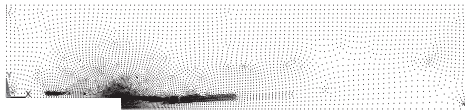
Z uteženjem robnih elementov smo se želeli izogniti spreminjanju vrednosti y^+ , ki v območju opazovanja zavzema vrednosti med $30 < y^+ < 150$, razen na dnu kanala takoj za stopnico, kjer vrednost pade na $y^+ = 1$ in ob točki pritrditve toka, kjer pade vrednost na $y^+ = 10$. Največjo vrednost sicer zavzema $y^+ = 620$ ob zgornjem robu vhodnega kanala, kjer se tok še ne razvije.



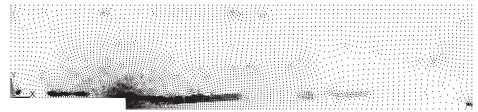
(a) Prvotna mreža



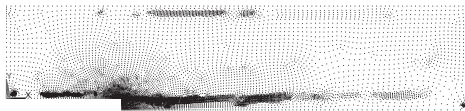
(b) Vozlišča po prvem premreževanju



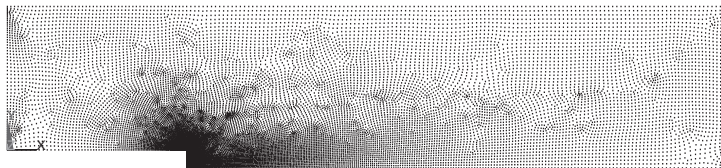
(c) Vozlišča po drugem premreževanju



(d) Vozlišča po tretjem premreževanju



(e) Vozlišča po četrtem premreževanju

Slika 3 : Slike vozlišč po premreževanju**Slika 4** : Vozlišča v referenčnem modelu brez premreževanja (model 2)

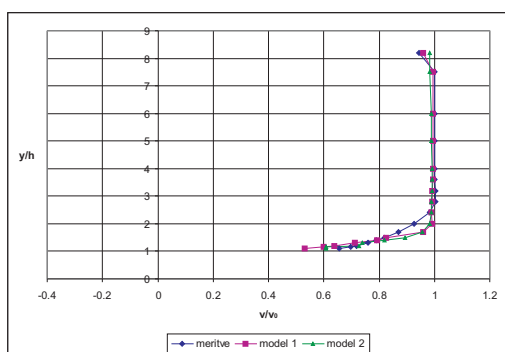
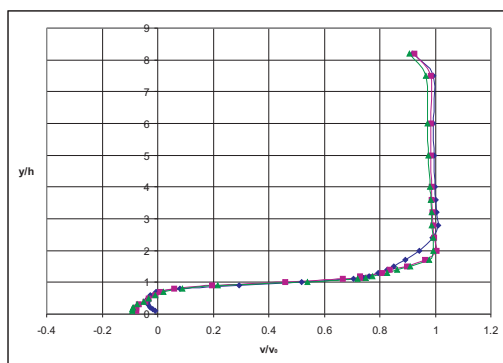
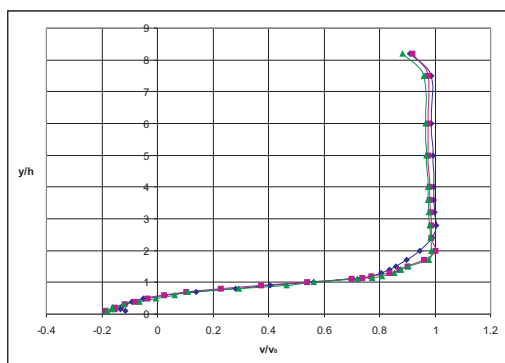
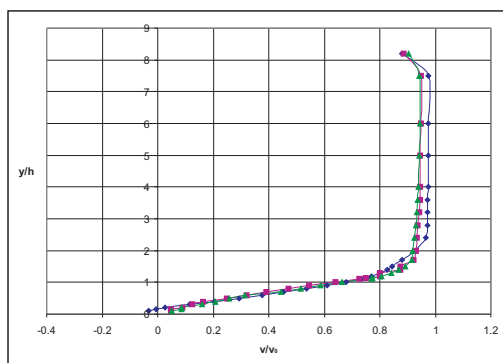
Opazovali smo tudi čas potreben za izračun na računalniku (AMD Athlon 2,00GHz, 1,5GB RAM), ki je pri premreževanem modelu 3591s, pri modelu z enotno mrežo pa 11518s. Skrajšan je torej za 68%.

Kvaliteta turbulentnih modelov in računskih postopkov, se ocenjuje tudi glede na napovedano recirkulacijsko dolžino in profil hitrosti. Pri premreženem modelu je relativna recirkulacijska dolžina glede na višino stopnice $L_{R1}/h = 4,72$, pri referenčnem modelu z enotno mrežo $L_{R2}/h = 4,57$ in eksperimentalno dobljena $L_{Re}/h = 6,26$ [3].

Znano je [12], da je izračunana dolžina pri izbiri $k-\epsilon$ modela 20% do 25% krajša od dejanske. Če rezultate primerjamo s tem vidimo, da je model 1 napovedal L_R 75% natančno, model 2 pa 73%. Rezultati nam kažejo napredek, saj smo želeli izboljšati rezultate z obstoječim modelom in jih primerjati z meritvami.

Dobljeni profili hitrosti, so predstavljeni na sliki 5, kjer je premreževani model označen kot *model 1*, model z enotno, gosto mrežo kot *model 2* in eksperimentalni podatki kot *meritve*.

Slika 5(a) prikazuje profil hitrosti na mestu, ki ima x -koordinato $-4h$, torej v vstopnem kanalu. Vidimo, da se je profil že razvil. Hitrost iz meritev je nekoliko višja tik ob spodnji steni, kar neposredno vpliva na recirkulacijsko dolžino. Vidi se tudi boljše ujemanje *modela 1* z meritvami, v primerjavi z *modelom 2* v zgornjem delu kanala. Pri razmerju $x/h = 1$, se v spodnjem delu diagrama vidi območje povratnega toka. Tega napovesta oba modela, vendar je v meritvah

(a) $x/h = -4$ (b) $x/h = 1$ (c) $x/h = 2$ (d) $x/h = 5$ **Slika 5 :** Profili hitrosti pri izbranih vrednostih x/h

absolutna vrednost hitrosti manjša. Pri vrednosti $x/h = 5$ se vidi, da pri meritvah še ni dosežena točka recirkulacije, ko je v_x pri numeričnima modeloma ob steni, že pozitiven.

5 Zaključki

Z metodo samodejnega premreževanja smo želeli izboljšati rezultate numeričnih simulacij turbulentnih tokov. Idejo smo razvili in jo implementirali v program ter preizkusili na testnem primeru toka fluida. Izkazalo se je, da nam ob izbranem turbulentnem modelu, ki je slab za popis toka blizu stene, metoda nekoliko izboljša rezultate primerjane z meritvami.

Izbrana cenilka večinoma mreži območje z veliko vrtničnostjo, ki je v točki pritrditve ni. Želeli smo rezultate izboljšati na podlagi povečevanja gostote mreže v glavnini toka, kar nam je delno uspelo. Potrebno bi bilo preučiti še drugačne funkcije, ki bi bile primerne kot cenilke.

V literaturi bi bilo potrebno dobiti rešitve tega testnega primera s turbulentnimi modeli in stenskiimi funkcijami bolj primernimi za primer odcepitve na stopnici in algoritem uporabiti z uporabo tistih modelov (RNG k- ϵ , SST, LES).

Literatura

- [1] I. Babuška and W. Rheinboldt. Error estimates for adaptive finite element computations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 15:736–754, 1978.
- [2] M. Berger and J. Oliger. Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 53:484–512, 1984.
- [3] D. Driver and H. Seegmiller. Features of a reattaching turbulent shear layer in divergent channel flow. *AIAA Journal*, 23:163, 1985.
- [4] H. Jasak and A. Gosman. Automatic resolution control for the finite-volume method, part 1: A posteriori error estimates. *Numerical Heat Transfer*, 38:237–256, 2000.
- [5] B. Launder and D. Spalding. The numerical computation of turbulent flows. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 3:269–289, 1974.
- [6] J. Penman and M. Grieve. Self-adaptive mesh generation technique for the finite element method. *IEE Proceedings*, 134:634–650, 1987.
- [7] I. Petrović. Izračun toka fluida preko stopnice. Diplomsko delo, Fakulteta za strojništvo, Univerza v Ljubljani, 2009.
- [8] V. Šajn, D. Nožak, T. Kosel, and F. Kosel. Gradient method for mesh refinement in compressible fluid flow simulations. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, 79:254–260, 2007.
- [9] L. Škerget. Mehanika tekočin. Tehniška fakulteta UNI MB in Fakulteta za strojništvo UNI LJ, 1994.
- [10] S. Thangam and C.G. Speziale. Turbulent separated flow past a backward-facing step: A critical evaluation of two-equation turbulence models. *NASA Contractor Report 187532*, 1991.
- [11] D. C. Wilcox. Turbulence Modeling for CFD. DCW Industries, Inc., La Canada, California, 1993.
- [12] M. Zijlema, A. Segal, and P. Wesseling. Finite volume computation of 2d incompressible turbulent flows in general coordinates on staggered grids. Technical report, 1996. Dostopno na <http://ta.twi.tudelft.nl/isnas/report94-24/isrep2.html>.



Geometrijska optimizacija vitke konzole glede na problem bočne stabilnosti

M. Polajnar¹, R. Dražumerič¹, F. Kosel¹

Geometry optimization of a slender cantilever beam due to lateral buckling problem

Povzetek. V delu obravnavamo geometrijsko optimizacijo vitke konzole, ki je na prostem koncu obremenjena s točkovno obremenitvijo. Optimizacija je izvedena z variacijskim principom v kombinaciji z Lagrange-ovimi množitelji. Dobljene Euler-Lagrange-ove enačbe so rešene numerično in opravljena je primerjava z aproksimativno optimizacijo v komercialno dostopnem paketu za preračune po metodi končnih elementov.

Abstract. This work deals with the geometry optimization of a slender cantilever beam, which is subjected to a point load at the free end. The optimization is performed using the variational principle with Lagrange multipliers. Corresponding Euler-Lagrange equations are solved numerically and compared to solutions obtained using a commercial finite element package for approximate optimization.

1 Uvod

Uporaba visoko nosilnih materialov ima za posledico vitkost konstrukcijskih elementov in s tem večjo občutljivost na stabilnostne probleme. Mejo stabilnosti elementa lahko povišamo z optimizacijo geometrije.

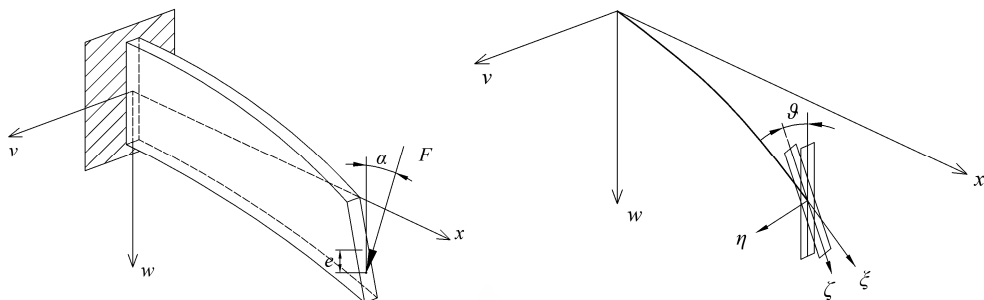
Namen tega prispevka je predstaviti različna pristopa k večparametrskemu problemu geometrijske optimizacije konzole, obremenjene s poljubno kombinacijo upogibne in tlačne obremenitve, glede na mejo bočne stabilnosti. Za nekaj obremenitvenih pogojev najdemo primere geometrijske optimizacije v prispevkih [2], [4].

2 Fizikalno matematični model

Obravnavamo vitko elastično konzolo pravokotnega prečnega prereza in dolžine l , ki je na prostem koncu obremenjena s silo F v vertikalni ravnini $x-w$, kot je prikazano na sliki 1.

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

Usmeritev točkovne obremenitve je definirana s kotom α , njeno prijemališče pa z ekscentričnostjo e .



Slika 1: Deformirana konzola z obremenitvijo in premični koordinatni sistem

Matematični model problema bočne stabilnosti je izpeljan na podlagi teorije velikih premikov [4]. Za potrebe geometrijske optimizacije, ki se nanaša na mejo bočne stabilnosti, je model zapisan v linearizirani obliki. Pogoja za pojav nestabilnega stanja pri upogibni obremenitvi je izrazito tanek prečni prerez, zato upogib, ki se nanaša na os η , zanemarimo ($I_\zeta \ll I_\eta$). Poleg tega zanemarimo tudi učinke prečne sile. Bistveni vpliv na bočno stabilnost imata torzijski moment M_ξ in upogibni moment M_ζ , ki ju zapišemo za deformirano stanje konzole v linearizirani obliki:

$$\begin{aligned} M_\xi &= F [\cos \alpha (v_1 - e\vartheta_1 - v - (1-x)v') - \sin \alpha ev'], \\ M_\zeta &= F [\sin \alpha (v_1 - e\vartheta_1 - v + e\vartheta) + \cos \alpha (1-x)\vartheta], \end{aligned} \quad (1)$$

kjer je ϑ_1 zasuk in v_1 prečni pomik na prostem koncu.

Zvezo med obremenitvami in deformacijami za vitko elastično konzolo povzamemo iz teorije nosilcev [7]:

$$\vartheta' = \frac{M_\xi}{GI_t}, \quad v'' = \frac{M_\zeta}{EI_\zeta}, \quad (2)$$

kjer je E elastični modul, $G = E/(2(1+\nu))$ strižni modul (ν je Poisson-ovo število), $I_t = ht^3/3$ torzijski vztrajnostni moment in $I_\zeta = ht^3/12$ aksialni vztrajnostni moment pravokotnega prečnega prereza okrog osi ζ .

Rešitev optimizacijskega problema naj bo neodvisna od izbire lastnosti referenčne konzole, zato uvedemo brezdimenzijsko obliko. Zapišemo brezdimenzijske spremenljivke:

$$\bar{x} = x/l, \quad \bar{v} = v/l, \quad \bar{e} = e/l. \quad (3)$$

Definiramo geometrijske lastnosti konzole v brezdimenzijski obliki (indeks 0 se nanaša na referenčno konzolo):

$$\bar{A} = \frac{A}{A_0} = \frac{ht}{h_0 t_0} = \bar{h} \bar{t}, \quad \bar{I} = \frac{I_\zeta}{I_{\zeta 0}} = \frac{I_t}{I_{t0}} = \frac{ht^3}{h_0 t_0^3} = \bar{h} \bar{t}^3, \quad \bar{V} = \frac{V}{V_0} = \int_0^1 \bar{A}(\bar{x}) d\bar{x}, \quad (4)$$

kjer je \bar{h} relativna višina, \bar{t} relativna debelina, \bar{A} relativni prečni prerez, \bar{I} relativni vztrajnostni moment in \bar{V} relativni volumen konzole. V brezdimenzijski obliki zapišemo še relativno kritično silo \bar{F} :

$$\bar{F} = F/F_0, \quad (5)$$

kjer kritično silo za referenčno konzolo izrazimo s parametrom λ_0 v obliki:

$$F_0 = \lambda_0 \sqrt{\cos^2 \alpha + \frac{1+\nu}{2} \sin^2 \alpha} \sqrt{EI_{s0} GI_{t0}} / l^2. \quad (6)$$

Za potrebe optimizacije definiramo dodatno povezavo med relativnim vztrajnostnim momentom ter relativnim prečnim prerezom za tri primere:

$$\bar{I} = \bar{A}^n; \quad n = 1, 2, 3, \quad (7)$$

kjer $n = 1$ pomeni konstantno debelino, $n = 2$ konstantno razmerje med višino in debelino in $n = 3$ konstantno višino konzole.

Uvedemo nove spremenljivke $u_1 = \vartheta$, $u_2 = \bar{v}_1 - \bar{e} \vartheta_1 - \bar{v}$ in $u_3 = u_2'$ ter ob uporabi doslej navedenih zvez (1)-(7) zapišemo homogen sistem linearnih diferencialnih enačb, ki opiše problem bočne stabilnosti konzole spremenljivega prečnega prereza:

$$u_i' = f_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (8)$$

pri čemer so:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\bar{F}}{\bar{A}^n} \lambda_0 \sqrt{\frac{1+\nu}{2}} \sqrt{\cos^2 \alpha + \frac{1+\nu}{2} \sin^2 \alpha} \left[(\cos \alpha (1 - \bar{x}) + \sin \alpha \bar{e}) u_3 + \cos \alpha u_2 \right], \\ f_2 &= u_3, \\ f_3 &= -\frac{\bar{F}}{\bar{A}^n} \lambda_0 \sqrt{\frac{1+\nu}{2}} \sqrt{\cos^2 \alpha + \frac{1+\nu}{2} \sin^2 \alpha} \left[(\cos \alpha (1 - \bar{x}) + \sin \alpha \bar{e}) u_1 + \sin \alpha u_2 \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Robnemu problemu (8) pripadajo robni pogoji:

$$u_1(0) = 0, \quad u_3(0) = 0, \quad u_2(1) + \bar{e} u_1(1) = 0. \quad (10)$$

3 Optimizacijski problem

Optimizacijski problem definiramo na dva načina:

1. Iščemo potek prečnega prereza konzole, pri katerem dosežemo maksimalno kritično silo ob omejitvi, da je volumen optimirane konzole enak volumnu referenčne konzole.
2. Iščemo potek prečnega prereza konzole, pri katerem dosežemo minimalni volumen ob omejitvi, da je kritična sila optimirane konzole enaka kritični sili referenčne konzole.

Optimizacijska problema sta povezana med sabo, kar bo prikazano v nadaljevanju.

3.1 Metoda variacijskega problema

Optimizacijskemu problemu priredimo variacijski problem z zapisom funkcionala:

$$J = \int_0^1 \bar{A}(\bar{x}) d\bar{x}, \quad (11)$$

za katerega iščemo minimum. Omejitev rešitve variacijskega problema predstavlja robni problem (8) s pripadajočimi robnimi pogoji (10). Uporabimo metodo variacijskega problema

z omejitvami [6] in vključimo omejitve v osnovni funkcional (11) z uporabo Lagrange-ovih množiteljev $p_1(\bar{x}), p_2(\bar{x}), p_3(\bar{x})$ ter zapišemo dopolnjeni funkcional:

$$J^* = \int_0^1 \left(\bar{A} + \sum_{i=1}^3 p_i (f_i - u_i') \right) d\bar{x} = \int_0^1 G d\bar{x}. \quad (12)$$

V skladu z variacijskim postopkom zapišemo Euler-Lagrange-ove enačbe, ki predstavljajo potrebni pogoj za minimum funkcionala (12):

$$\frac{\partial G}{\partial u_i} - \frac{d}{d\bar{x}} \left(\frac{\partial G}{\partial u_i'} \right) = 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad \frac{\partial G}{\partial \bar{A}} = 0. \quad (13)$$

Z uporabo zvez iz robnega problema (8) zapišemo zgornji sistem diferencialnih enačb v obliki:

$$\begin{aligned} p_1' &= -\frac{\bar{F}}{\bar{A}^n} \lambda_0 \sqrt{\frac{2}{1+\nu}} \sqrt{\cos^2 \alpha + \frac{1+\nu}{2} \sin^2 \alpha} \left[\cos \alpha (1 - \bar{x}) + \sin \alpha \bar{e} \right] p_3, \\ p_2' &= -\frac{\bar{F}}{\bar{A}^n} \lambda_0 \sqrt{\cos^2 \alpha + \frac{1+\nu}{2} \sin^2 \alpha} \left[\sqrt{\frac{1+\nu}{2}} \cos \alpha p_1 - \sqrt{\frac{2}{1+\nu}} \sin \alpha p_3 \right], \\ p_3' &= -\frac{\bar{F}}{\bar{A}^n} \lambda_0 \sqrt{\frac{1+\nu}{2}} \sqrt{\cos^2 \alpha + \frac{1+\nu}{2} \sin^2 \alpha} \left[\cos \alpha (1 - \bar{x}) + \sin \alpha \bar{e} \right] p_1 - p_2, \\ \bar{A} &= \left(n \bar{F} \lambda_0 \sqrt{\cos^2 \alpha + \frac{1+\nu}{2} \sin^2 \alpha} \left[\sqrt{\frac{1+\nu}{2}} \left((\cos \alpha (1 - \bar{x}) + \sin \alpha \bar{e}) u_3 + \cos \alpha u_2 \right) p_1 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sqrt{\frac{2}{1+\nu}} \left((\cos \alpha (1 - \bar{x}) + \sin \alpha \bar{e}) u_1 + \sin \alpha u_2 \right) p_3 \right] \right)^{\frac{1}{n+1}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Na podlagi primerjave sistemov enačb (8) in (14)₁₋₃, razberemo povezavo med Lagrange-ovimi množitelji p_i in funkcijami u_i :

$$\begin{aligned} p_1 &= (\cos \alpha (1 - \bar{x}) + \sin \alpha \bar{e}) u_3 + \cos \alpha u_2, \\ p_2 &= -\cos \alpha u_1 + \sin \alpha u_3, \\ p_3 &= -(\cos \alpha (1 - \bar{x}) + \bar{e} \sin \alpha) u_1 - \sin \alpha u_2. \end{aligned} \quad (15)$$

Na podlagi zveze (15) in robnih pogojev (10) predpišemo robne pogoje za Lagrange-ove množitelje:

$$p_2(0) = 0, \quad p_1(1) - \bar{e} p_2(1) = 0, \quad p_3(1) = 0. \quad (16)$$

Povezave (15) uporabimo v enačbi (14)₄ in jo zapišemo v skladu s prvo in drugo definicijo optimizacijskega problema:

$$1. \quad \bar{A} = \frac{\left(\sqrt{\frac{1+\nu}{2}} p_1^2 + \sqrt{\frac{2}{1+\nu}} p_3^2 \right)^{\frac{1}{n+1}}}{\int_0^1 \left(\sqrt{\frac{1+\nu}{2}} p_1^2 + \sqrt{\frac{2}{1+\nu}} p_3^2 \right)^{\frac{1}{n+1}} d\bar{x}}; \quad 2. \quad \bar{A} = \bar{V} \frac{\left(\sqrt{\frac{1+\nu}{2}} p_1^2 + \sqrt{\frac{2}{1+\nu}} p_3^2 \right)^{\frac{1}{n+1}}}{\int_0^1 \left(\sqrt{\frac{1+\nu}{2}} p_1^2 + \sqrt{\frac{2}{1+\nu}} p_3^2 \right)^{\frac{1}{n+1}} d\bar{x}}, \quad (17)$$

kjer pri prvem optimizacijskem problemu iščemo maksimalno relativno kritično silo \bar{F}_{maks} , pri drugem pa minimalni relativni volumen \bar{V}_{min} ob pogoju $\bar{F} = 1$. Iz enačb (14)₁₋₃ in (17) je razvidna zveza med ciljnim funkcijama:

$$\bar{V}_{\min} = \bar{F}_{\max}^{-\frac{1}{n}}. \quad (18)$$

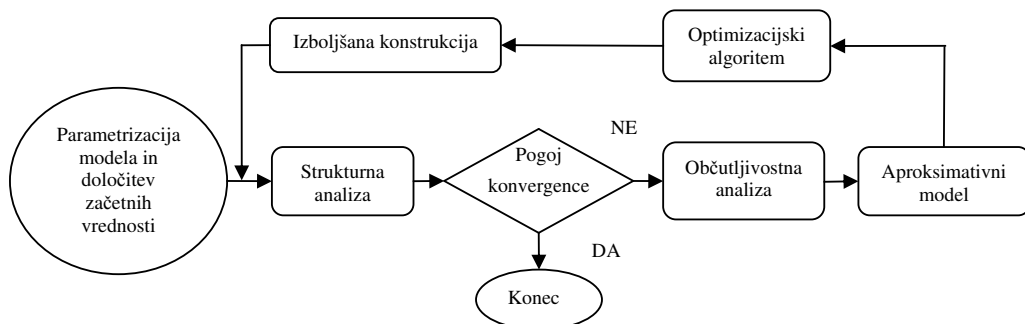
Tako je optimizacijski problem preko variacijskega postopka definiran z robnim problemom (14)₁₋₃ ob robnih pogojih (16) in izrazoma za relativni prečni prerez (17).

Optimizacijski problem rešimo iteracijsko z uporabo metode končnih razlik:

- Določimo vrednost parametra λ_0 in pripadajočih funkcij $(p_1, p_2, p_3)^{(0)}$ za referenčno konzolo ($\bar{F}^{(0)} = 1, \bar{A}^{(0)} \equiv 1$).
- Na podlagi robnega problema (14)₁₋₃, (16) in zveze (17)₁ izvajamo iteracije:
 $\lambda_0, (p_1, p_2, p_3)^{(\mu)} \Rightarrow \bar{A}^{(\mu+1)} \Rightarrow \bar{F}^{(\mu+1)}, (p_1, p_2, p_3)^{(\mu+1)}; \mu = 0, 1, 2, \dots$
- Postopek zaključimo in privzamemo rešitev, ko je izpolnjen pogoj $\bar{F}^{(\mu+1)} - \bar{F}^{(\mu)} < \varepsilon$, kjer smo uporabili vrednost $\varepsilon = 10^{-5}$.

3.2 Zaporedna aproksimativna optimizacija

Aproksimativna optimizacija je izvedena v komercialno dostopnem programskem paketu Altair Hyperworks, ki vključuje metodo končnih elementov. Za optimizacijo je uporabljena zaporedna aproksimativna metoda [1], [5]. Diagram poteka metode je prikazan na sliki 2.



Slika 2: Optimizacija z zaporedno aproksimativno metodo

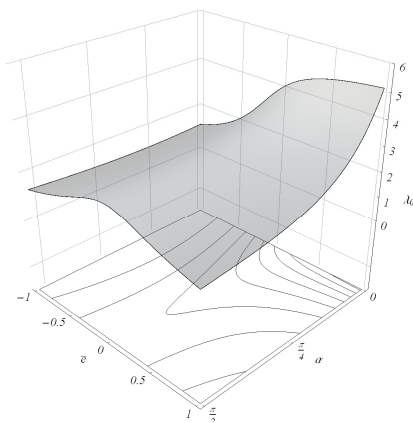
Pri zaporedni aproksimativni metodi model diskretiziramo s končnimi elementi in ga parametriziramo z uporabo projektnih spremenljivk [3] (najpogosteje se uporabljajo projektne spremenljivke velikosti, geometrije in topologije). Optimum iščemo na aproksimativnem modelu, v lokalnem območju projektnih spremenljivk. Lokalni aproksimativni model temelji na Taylor-jevi vrsti in je določen na podlagi izračunov občutljivosti.

Uporabljeni model je sestavljen iz 100 1D končnih elementov, kjer ima posamezni element konstanten prečni prerez. Uporabljene so projektne spremenljivke velikosti, ki predstavljajo višino oz. debelino posameznega končnega elementa. Pri izračunih z aproksimativno metodo v vseh primerih izhajamo iz začetne oblike konzole konstantnega prečnega prereza z izbranimi vrednostmi materialnih parametrov $E = 2.1 \cdot 10^5$ MPa, $\nu = 0.3$ in geometrijskih parametrov $l = 300$ mm, $h_0 = 25$ mm, $t_0 = 1$ mm.

4 Rezultati in diskusija

4.1 Rezultati za referenčno konzolo

Vrednost kritične obremenitve za referenčno konzolo je podana s parametrom $\lambda_0(\alpha, \bar{e})$.

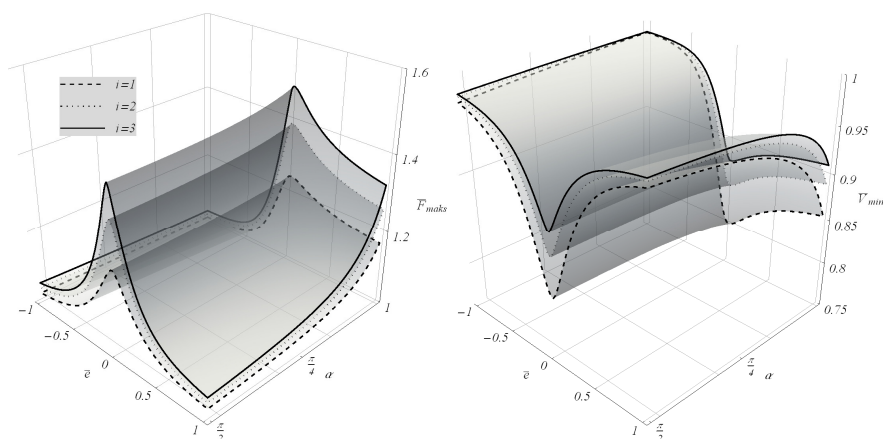


Slika 3: Vrednosti parametra λ_0

Na sliki 3 je dobro razviden vpliv parametrov α in \bar{e} na bočno stabilnost referenčne konzole. Pri upogibno obremenjeni konzoli ($\alpha=0$) pozitivna vrednost ekscentričnosti zmanjša skupno torzijsko obremenitev v mejnem stanju in s tem poveča vrednost λ_0 , negativna vrednost ekscentričnosti pa vnese dodatni torzijski moment in zmanjša vrednost λ_0 . Pri tlačno obremenjeni konzoli ($\alpha=\pi/2$) pa ekscentričnost vedno doda torzijsko obremenitev in tako zmanjša vrednost λ_0 .

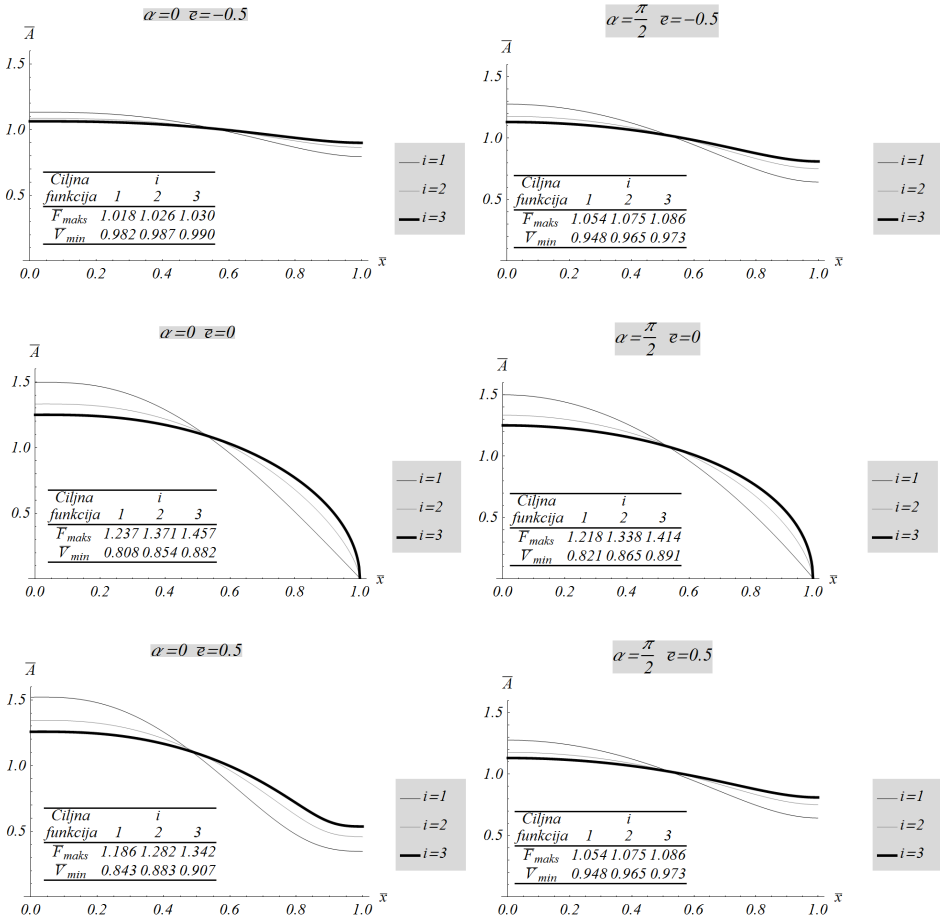
4.2 Rezultati optimizacije z metodo variacijskega problema

Rezultati optimizacije so prikazani na sliki 4 in so podani kot $\bar{F}_{maks}(\alpha, \bar{e})$ in $\bar{V}_{min}(\alpha, \bar{e})$.



Slika 4: Maksimalna relativna kritična sila in minimalni relativni volumen

Iz grafov je razvidno, da je optimizacija najbolj učinkovita v primeru ničelne vrednosti ekscentričnosti pri vseh vrednostih kota α . Maksimalno kritično silo dosežemo pri tretjem geometrijskem pogoju, minimalen volumen pa pri prvem geometrijskem pogoju.



Slika 5: Primeri potekov optimalnega relativnega prečnega prereza

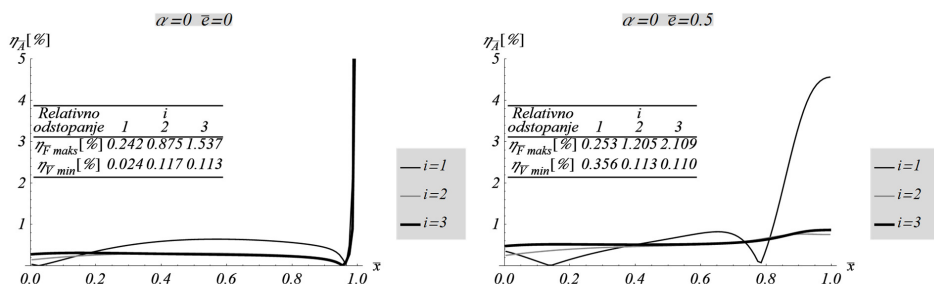
Za izbrane vrednosti obremenitvenih parametrov so na sliki 5 prikazani tudi poteki optimalnega prečnega prereza. V primerih, kjer je optimizacija najbolj učinkovita, se tudi potek optimalnega prečnega prereza najbolj razlikuje od referenčnega ($\bar{A} \equiv 1$).

4.3 Primerjava z rezultati aproksimativne optimizacije

Primerjava rezultatov za posamezno veličino f je podana z relativnim odstopanjem:

$$\eta_f = \frac{|f_{var} - f_{aprok}|}{f_{var}} \cdot 100[\%]. \quad (19)$$

Na sliki 6 je prikazano relativno odstopanje potekov optimiranega prečnega prereza η_A , maksimalne relativne kritične sile $\eta_{F_{maks}}$ in minimalnega relativnega volumna $\eta_{V_{min}}$ za dva obremenitvena primera. Iz primerjave je razvidno, da se rezultati večinoma zelo dobro ujemajo, razen v bližini prostega konca, kjer je vpliv prečne sile relativno velik.



Slika 6: Relativno odstopanje rezultatov aproksimativne optimizacije

5 Zaključek

V prispevku je predstavljen postopek geometrijske optimizacije konzole z variacijskim principom v brezdimenzijski obliki za dvoparametrski problem. Za posamezne primere je podana tudi primerjava z rezultati aproksimativne metode optimizacije, ki temelji na metodi končnih elementov. Kratek povzetek dobljenih rezultatov geometrijske optimizacije:

- Geometrijska optimizacija je najbolj učinkovita pri ničelni vrednosti ekscentričnosti.
- Pri visokih vrednostih ekscentričnosti se izkaže, da se geometrija optimirane konzole približuje geometriji referenčne konzole.
- Z aproksimativno optimizacijo se dobro približamo rezultatom optimizacije po variacijskem postopku, torej je uporabljeni model za problem bočne stabilnosti ustrezen.

Literatura

- [1] Altair Hyperworks, Release 11, Hyperworks user's guide, 2011
- [2] T.M. Atanackovic, *Optimal shape of an elastic rod in flexural – torsional buckling*, ZAMM, Vol. 87, No. 10, 2007
- [3] Kyung K. Choi and Nam H. Kim, *Structural sensitivity analysis and optimization 1: Linear systems*, Springer, 2005
- [4] R. Dražumerič, F. Kosel, *Optimization of geometry for lateral buckling process of a cantilever beam in the elastic region*, Thin-Walled Structures, Vol. 43, 2005
- [5] R.T. Haftka, Z. Gürdal, *Elements of structural optimization*, Kluwer Academic, Netherlands, 1992.
- [6] S.S. Rao, *Engineering optimization: theory and practice*, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2009
- [7] S. P. Timoshenko, J. Gere, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, New York, 1961.



Nadzor toka s plazmo pri profilu vetrne turbine

E. Potočar¹, M. Eberlinč² in B. Širok³

Control of separation flow with plasma actuators over wind turbine blade

Povzetek. V tem prispevku je analiziran vpliv plazme na lopatico vetrne turbine pri Re 7600 in Re 10500. Analiza je narejena z vizualizacijo toka. Rezultati kažejo, da ima plazma pri nizkih Re pomemben vpliv na pretok okoli lopatice vetrne turbine. Ta vpliv je odvisen od moči plazme, samega generatorja plazme in Re.

Abstract. This paper analyzes the impact of plasma on the wind turbine blade at Re 7600 and Re 10500. The analysis was done with flow visualization. The results show that the plasma at low Re has a significant impact on the flow around the blades of wind turbine. This effect depends on the power of plasma, plasma generator itself and Re.

1 Uvod

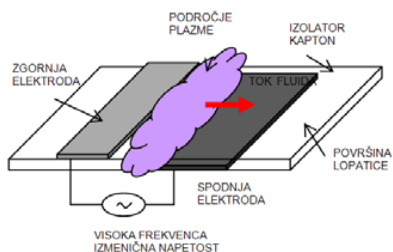
Vetrne turbine se konstruirajo z namenom čim večjega izkoristka proizvedene kilovatne ure električne energije gleda na celotni strošek investicije in njenega delovanja. Ena od možnih načinov za izboljšanje zmogljivosti in življenjske dobe vetrnih turbin je tudi s pomočjo nadzora toka fluida z aktivnimi kontrolnimi sistemi na lopaticah vetrnih turbin. Pristop k nadzoru toka fluida v mejni plasti in pri odcepljanju je usmerjen na možnost aktivnega nadzora toka fluida na profilu vetrne turbine z uporabo plazma generatorjev. Ti zmanjšajo odcepljanje toka v mejni plasti ob steni na profilu lopatice, zmanjšajo povratni tok in recirkulacijske vrtince.

Generatorji plazme (slika 1) so sestavljeni iz dveh elektrod, ki se nahajajo na površini in so ločeni z dielektričnim materialom. Izmenična visoka napetost na elektrodah povzroči, da postane zrak v njihovi bližini šibko ioniziran. Ioniziran zrak (plazma), v prisotnosti gradienta električnega polja, ki ga povzročijo elektrode, rezultira v vektorsko silo, ki deluje na zunanji tok.

¹ Republika Slovenija, Ministrstvo za gospodarstvo

² Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

³ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo



Slika 1: Shema plazma generatorja.

Merjenje na profilu lopatice je bilo predhodno že predstavljeno v prispevkih Potočar in sod. [6] in Eberlin in sod. [7]. Pri analizi hitrostnega polja ob profilu lopatice je bilo ugotovljeno, da plazma vpliva na tokovno polje ob profilu lopatice. Za fizikalno razumevanje turbulentnih lastnosti na lopatici je bila izvedena eksperimentalna analiza tokovnega polja ob profilu lopatice. Analiza je bila izvedena na profilu serije NACA, ki je bil postavljen v testni del zračnega kanala s stacionarnim homogenim tokovnim poljem. Namen meritev na profilu je predstavitev sprememb porazdelitve hitrosti, fluktuacij hitrosti in meje odcepljanja na profilu zaradi uvedbe plazme.

2 Eksperiment in meritve

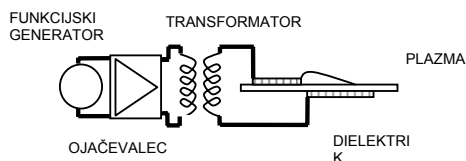
Izbran je bil profil NACA 4421 z znano aerodinamsko karakteristiko in koordinatami profila. Izbran profil se pojavi pri geometrijskem in aerodinamičnem zvitju lopate vetrne turbine bližje korenu vetrnice in ima izrazitejšo debelino (razmerje višina/dolžino znaša 0,2). Vpliv generatorjev plazme na tok fluida okoli lopatice je odvisen od več pogojev (moči plazme, hitrosti toka fluida, vpadnega kota profila, ...). Na zgornji strani profila so nameščeni štirje generatorji plazme, kar je prikazano tudi na sliki 2.



Slika 2: Generiranje plazme na profile vetrne turbine.

Električna shema generatorja plazme je shematsko prikazana na sliki 3. Elektrode so iz prevodnih trakov bakra debeline 80 mikronov. Trakovi elektrod so dolžine 70 mm in širine 5 mm. Ločeni so z 50 mikronov debelim dielektričnim materialom - Kapton trakom (lastnost prebojne električne trdnosti 118 kV/mm).

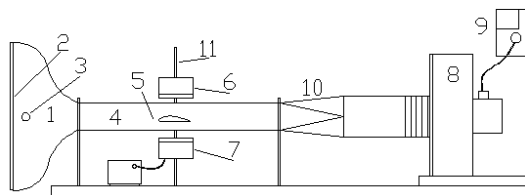
Funkcijski generator zagotavlja sinusni signal z določeno frekvenco. Ta je vezan na ojačevalce signala. Ojačan signal je potem povezan z visokofrekvenčnim transformatorjem, ki je sposoben proizvesti 6 kV izhoda z 1-250 V na vhodu pri frekvencah 4-11 kHz. Vhodna moč je bila spremljana z osciloskopom.



Slika 3: Shema generatorja plazme.

Meritve so bile izvedene v zračnem kanalu (slika 4). Opravljene so bile z računalniško podprto vizualizacijo. Zračni tok vstopa v zračni kanal skozi vstopno ustje kvadratnega preseka, pri katerem znaša razmerje površin med vstopnim ustjem in testnim delom zračnega kanala 16:1 in velikostjo $400 \text{ mm} \times 400 \text{ mm}$.

V tem delu so zanimive spremembe in vplivi na tok fluida, ki nastanejo zaradi uporabe plazme, zato je bil izbran le en vpadni kot, pri katerem so bile izvedene meritve. Ta je bil nastavljen na 7° .



Slika 4: a) Shema zračnega kanala; (1) vstopno ustje $400 \text{ mm} \times 400 \text{ mm}$; (2) umirjevalna mreža na vstopu v zračni kanal; (3) generator dima; (4) testni del zračnega kanala, narejen iz pleksi stekla velikosti $800 \text{ mm} \times 100 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}$; (5) profil NACA 4421; (6) prvi svetlobni vir; (7) drugi svetlobni vir; (8) radialni ventilator; (9) frekvenčni regulator; (10) satovje; (11) stojalo za svetlobna vira;

3 Rezultati

3.1 Meritve z računalniško podprto vizualizacijo

Tokovne strukture ob profilu lopatice so bile posnete z računalniško podprto vizualizacijo. Narejeni so bili časovno zaporedni digitalni posnetki zračnega toka ob profilu z in brez uporabe plazme. Meritve tokovnih struktur z računalniško podprto vizualizacijo so bile narejene s hitro kamero za zajemanje digitalnih posnetkov. Uporabljena je bila kamera Dragonfly Express IEEE-1394b z objektivom z visoko ločljivostjo Edmund Optics 75 mm Double Gauss. S hitro kamero je bil posnet 8-bitni posnetek, velikosti 613×200 elementov (ang. *pixel*). Frekvenca vzorčenja kamere je znašala 400 Hz. Kamera je postavljena pravokotno na os merjenja votlega profila v razdalji 3 m od testnega dela zračnega kanala. Z nastavljivo lečo smo generirali snop prerezne ravnine debeline cca. 3 mm. Prerezna debelina je bila po celotnem preseku zračnega kanala enaka in postavljena na sredino testnega dela zračnega kanala. Osvetlitev profila je bila izvedena tako, da je odboj svetlobe v izbranem polju najmanjši.

V tem delu smo določili tokovno hitrostno polje z metodo računalniško podprte vizualizacije. Metoda je bila predhodno že predstavljena v prispevku Bajcar in sod. 0. Metoda temelji na fizikalnih relacijah, ki združujejo tokovno polje koncentracije s tokovnim poljem hitrosti toka fluida/polutanta. Rezultati analize so porazdelitve hitrosti po komponentah v ravnini,

kjer so s hitro kamero zajeti digitalni posnetki. Metoda omogoča meritve hitrostnega polja v poljubnem elementu posnetka v danem trenutku, saj se lahko ista sekvenca tokovnih digitalnih posnetkov uporabi za vse merilne točke.

Vpliv plazme na tok fluida ob profilu lopatice je odvisna od več pogojev, kot so npr. moč plazme, hitrosti toka fluida, vpadni koti profila lopatice ... Analizo [10] vpliva plazme na tok je mogoče dobiti z analizo stopnje intenzivnosti aktiviranja plazme kot funkcijo vpadnega kota α in hitrosti fluida U_0 . Intenzivnost je ovrednotena z brezdimenzijskim koeficientom moči plazme C_w in definirana kot [9]:

$$C_w = \frac{W}{0,5\rho U_0^3 b \delta} \left(\frac{L_{ele}}{c} \right)^2, \quad (1)$$

kjer L_{ele} predstavlja razdaljo med elektrodami, b predstavlja dolžino elektrode, δ predstavlja debelino plazme in c globino profila lopatice. Parameter W je moč generiranja plazme in se lahko enostavno izračuna kot zmnožek izmeničnega toka I in napetosti med elektrodama ΔV . Eksperimenti so bili narejeni pri dveh hitrostih, predstavljeni v tabeli 1 in kažejo na vpliv plazme na aerodinamične lastnosti pri različnih pogojih natekanja fluida.

Tabela 1: Aerodinamični brezdimenzijski koeficient v odvisnosti od pogojev pretoka in moči generiranja plazme.

Tokovni pogoji	α (°)	Re	$C_w (\times 10^3)$ pri max. napetosti 6kV
1	7	7600	22,5
2	7	10500	11,9

Iz vrednosti aerodinamičnega brezdimenzijskega koeficienta predstavljenega v tabeli 1 je razvidno, da je razlika pri dveh različnih hitrostih v podanih dveh primerih približno dvojna. Vpadni kot profila lopatice vetrne turbine je 7° , ker je pod tem vpadnim kotom vpliv na tok fluida najbolj viden. Meritev je bila opravljena pri dveh delovnih točkah. Odgovarjajoče Reynoldsovo število na osnovi hitrosti fluida je Re 7600 in Re 10500. Efekti povzročeni zaradi vpliva plazme so odvisni od režima generiranja plazme.

Pri meritvah z vzbujanjem s plazmo so bile izvedene meritve pri različnih delovnih točkah z uporabo različnih vrednosti napetosti na generatorju plazme in napetosti na ojačevalcu. Meritve so bile izvedene na lokalnem nivoju tako, da si sledijo neposredno ena za drugo. Pri posamezni meritvi je bil dovod dimnega polutanta izveden na enak način. Za analizo so bile uporabljene tiste sekvence digitalnih posnetkov, kjer je bila enakomernost izhajanja polutanta in odstopanja zaradi časovne spremembe koncentracije dimnega polutanta manjša od 2 %. Za primerljivost rezultatov med izvedbama z in brez plazme je na več primerih narejena analiza v različnih delovnih točkah ob lopatici. Rezultati pridobljeni s pomočjo računalniško podprte vizualizacije so analizirani pri obdelavi naslednjih primerov in pojavov (i) tokovne razmere pri ponovnem prilepljanju toka fluida pod vplivom plazme generatorja, (ii) tokovne razmere na profilu pri različnih hitrostih in intenziteti plazme, (iii) tokovne razmere v neposredni bližini plazme generatorja

3.2 Rezultati meritev tokovnih razmer pri ponovnem prilepljanju toka fluida pod vplivom plazme generatorja

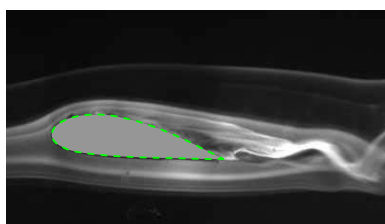
V nizkem območju Re <30000 je za profil NACA 4421 značilno, da nima laminarnega toka vzdolž profila. Ko je vpadni kot profila pod kotom 7° se pričakuje točko ločitve laminarnega

toka od samega profila nekje na sredini zgornjega dela profila lopatice [12]. Vizualizacija toka brez plazme je prikazana na sliki 5. Ločitev toka na sesalni strani profila se pojavi na mestu označenem s puščico (slika 5). Zunanji tok fluida ni sposoben slediti poti profila lopatice, zato se loči od profila. Pričakuje se, da bo pod vplivom plazme (slika 6), tok fluida sledil obliki lopatice po zgornjem delu do zadnjega roba pri določenih pogojih.

Glede na strukturo toka ob profile lopatice brez plazme pride do velikih kvalitativnih sprememb pod vplivom plazme. Plazma prepreči nastajanje turbulentne mejne plasti. Plazma generatorji delujejo kot ejetorji. Lokalno zmanjšujejo pritisk na zgornjem delu profila zaradi večje hitrosti. Povratni gradient toka se zaradi plazme zmanjšuje, tako da ne pride do povečanja debeline mejne plasti in ne more priti do ločitve toka. Zato plazma prispeva k usmeritvi in stabilizaciji tokovne strukture. Na sliki 6 je razvidno, da sledi tok fluida po celotni dolžini profila.



Slika 5: Vizualizacija toka ob profilu lopatice (Re 10500, brez vzbujaanja s plazmo)

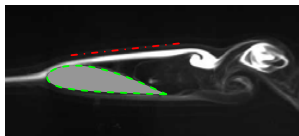


Slika 6: Vizualizacija toka ob profilu lopatice pod vplivom plazme (Re 10500, 5 kHz vzbujaanje s plazmo)

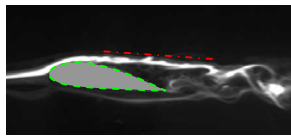
3.3 Rezultati meritev tokovnih razmer na profilu pri različnih hitrostih in intenziteti plazme

Rezultate pri različnih hitrostih in intenziteti plazme smo vrednotili in prikazali na več različnih načinov. Slike v nadaljevanju predstavljajo vizualizacijo toka pod vplivom različne moči plazme in različne hitrosti Re 7600 in Re 10500 v vetrovniku ter pri vpadnem kotu $\alpha = 7^\circ$. Slika 7 prikazuje tokovne razmere, kjer pride do separacije toka pri točki ločitve na $x/c \approx 0,3$ (x - oddaljenost od prednjega dela profila do ločitvene točke, c - dolžina tetiva lopatice). Na podlagi slike 7 lahko ocenimo točko ločitve toka in sledi dima, ki nakazuje tok odcepljanja. Po odcepljanju se razdalja med dimno sledjo odcepljenega toka in samo zgornjo površino profila povečuje.

Pod vplivom vzbujaanja plazme s frekvenco 4 kHz (slika 8), pride prav tako do odcepljanja toka v točki odcepljanja, ki je po profilu lopatice postavljena nižje. Po odcepljanju toka pod vplivom plazme, je tok odcepljanja občutno manjši in sledi bližje zadnjemu delu profila. Na sliki 8 je razvidno, da plazma povzroči, da tok bolj sledi samo zgornji površini profila, in da plazma zmanjša cirkulacijski tok in formacijo vrtincev na sesalni strani profila lopatice.



Slika 7: Vizualizacija toka (Re 7600, brez vzbujaanja s plazmo)



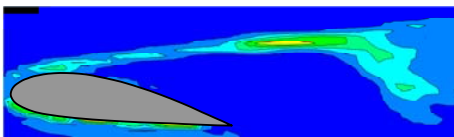
Slika 8: Vizualizacija toka (Re 7600, 4 kHz vzbujaanje s plazmo)



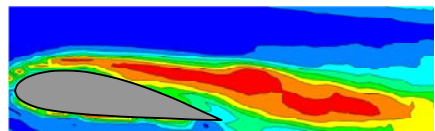
Slika 9: Vizualizacija toka (Re 7600, 5 kHz vzbujaanje s plazmo)

Iz slike 9 je razvidno, da je pod večjim vzbujanjem s plazmo, vpliv na sam tok ob profil še večji. Zaradi nameščenih več plazma generatorjev po zgornji strani profila, ji vrtinčna struktura skoraj v celoti sledi. V točno tem določenem primeru vzbujanja s plazmo lahko ugotovimo, da se cirkulacijski tok in vrtinci občutno zmanjšajo.

V nadaljevanju so rezultati na podlagi postopka meritev vizualizacije, predstavljeni v obliki izdelanih izolinij koncentracij dimnega polutanta toka. Pri izdelavi izolinij koncentracij dimnega polutanta toka, smo povprečili vrednost sivin za posamezno točko v velikosti večjega števila slik. Iz take porazdelitve dobimo bolj reprezentativno sliko, kako se obnaša tok fluida ob določenih pogojih vzbujanja s plazmo. Predstavljene so izolinije koncentracij dimnega polutanta pri dveh različnih primerih (i) brez vzbujanja plazme (slika 10) in (ii) z vzbujanjem plazme (slika 11) pri Re 10500 in s frekvenco 5 kHz. Digitalne slike za primere z in brez plazme pri enaki hitrosti so bile analizirane s programskim paketom Dynascan. Vsako okno je bilo velikosti 40×22 enakih celic in je bilo enako za zaporedje slik v sekvenci. Plazma ima najmočnejši vpliv v primeru vzbujanja s 5 kHz, tako da so v tem prispevku prikazani rezultati le za ta primer in le za en Re .



Slika 10: Vizualizacija toka
(Re 10500, brez vzbujanja s plazmo)

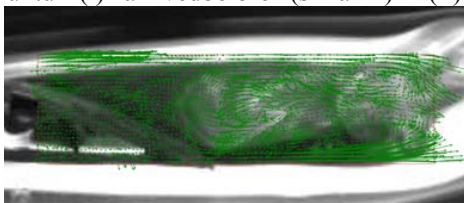


Slika 11: Vizualizacija toka
(Re 10500, 5 kHz vzbujanja s plazmo)

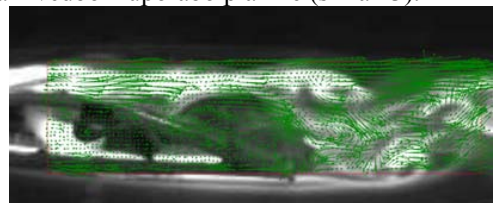
Iz rezultatov je razvidno, da sled dima polutanta, ki predstavlja tok ob zgornjem delu profila ob uvedbi plazme dobro sledi konturi (slika 11). Plazma prispeva k ohranjanju smeri toka in stabilizaciji strukture toka. Tok je prisiljen slediti profilu, zato se masni pretok blizu zadnjega roba profila poveča. Iz tega pojava je mogoče sklepati, da so spremembe smeri toka tokovnega polja okoli lopatice v prisotnosti plazme manjše. Posledično se lahko ugotovi, da plazma, uporabljena v tem primeru, ima pozitiven vpliv, saj preprečuje povečanje razlike tlaka, zmanjšanje toka v obtoku in oblikovanje vrtincev na sesalni strani profila, kar se lahko kaže tudi v zmanjšanju izgub energije.

Za dodatno razumevanje fizikalnih sprememb smo naredili eksperimentalno lokalno analizo tokovnega polja. Rezultati so pokazali, da lahko s predstavljeno računalniško podprto vizualizacijo določimo kinematiko toka v kompleksnih primerih kot so vrtnične tokovne strukture.

Rezultati so predstavljeni iz zaporednih digitalnih posnetkov z računalniško podprto vizualizacijo predstavljeni v nadaljevanju, kjer je prikazana porazdelitev hitrosti v vrtinčni strukturi (i) za izvedbo brez (slika 12) in (ii) za izvedbo z uporabo plazme (slika 13).



Slika 12: Porazdelitev toka
brez uporabe plazma generatorja



Slika 13: Porazdelitev toka
z uporabo plazma generatorja

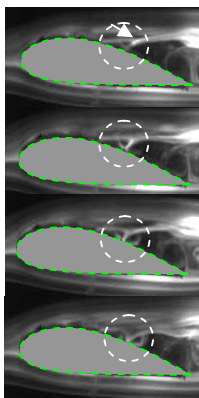
Na sliki 12 je razvidno, da je mejna plast sprva laminarna, na razdalji od vstopnega roba pa postane nestabilna in se preko prehodne mejne plasti razvije v turbulentno mejno plast. Pri dovolj veliki vrednosti pozitivnega tlačnega gradienta se pojavi na določeni točki vzdolž stene profila odcepitev mejne plasti. Za to točko pa se pojavi območje povratnega toka. Zato se mejna plast debeli in pride do recirkulacijskega vrtinca. Polno razviti vrtinci so prisotni v toku za profilom. Vrtinci nastajajo od sesalne do tlačne strani profila in tvorijo vrtnično stezo.

V primeru vpliva plazme na sliki 13 pride do spremenjenih mehanizmov generiranja vrtničnih struktur na sesalni strani profila. Plazma prispeva k ohranitvi smeri toka zraka in k stabilizaciji tokovnih struktur. Zmanjšajo se območja neugodnih tlačnih gradientov. Tok ob profilu je prisiljen slediti smeri toka, ki ga ustvarja plazma. Zato se točka odcepitve toka od profila seli vzdolž konture proti izstopnemu robu.

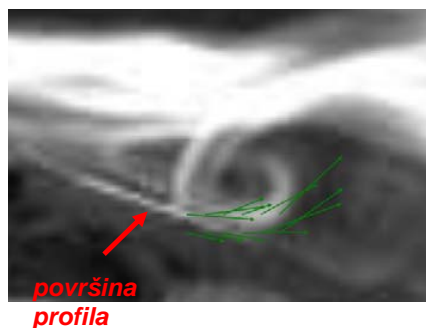
Razlago teh rezultatov je mogoče preslikati na delovanje in izboljšanje učinkovitosti vetrne turbine. Lahko povzamemo navedbe, podane na začetku; manjše odcepljanje toka od profila je bilo doseženo z uvedbo plazme na izstopnem robu profila, kjer pride do interakcije plazme z obtekajočim tokom. Omenjeni učinek se odraža v povečanem pridelanem in razpoložljivem prirastku totalnega tlaka pri izbranem volumnem pretoku in večji učinkovitosti.

3.4 Rezultati tokovnih razmer v neposredni bližini plazme generatorja

V okviru naslednjih rezultatov smo vizualno in numerično ovrednotili dogajanje v bližini plazma generatorja. Na sekvenci digitalnih posnetkov predstavljenih na sliki 14 so prikazane spremembe na posameznem generatorju plazme. Iz sekvence posnetkov je razvidno, kako plazma vpliva na tok v neposredni bližini generatorja in kako deluje na njega.



Slika 14: Hitrostna porazdelitev toka pri obtekanju toka fluida (Re 10500, vzbujanje s plazmo 5k Hz)



Slika 15: Hitrostna porazdelitev toka pri obtekanju toka fluida (Re 10500, vzbujanje s plazmo 5 kHz)

Na prvem zaporednem posnetku je razvidna večja gmota dima (označena s puščico), ki je pozicionirna direktno nad plazma generatorjem. Iz drugega zaporednega posnetka je razvidno, da je bila gmota potisnjena proti generatorju plazme navzdol proti površini profila. Iz tretjega in četrtega posnetka je razvidno, kako se potisnjena gmota dima razbije v dva vrtinca v neposredni bližini profila. Kmalu zatem pride do vrtničenja zaradi gradienta tlaka in povratnega toka fluida.

Iz slike 15 je razviden vpliv hitrostne porazdelitve toka tik ob generatorju plazme.

4 Zaključki

Iz rezultatov je razvidno, da lahko z generatorji plazme dobimo nadzor nad odcepljanjem toka fluida v mejni plasti. Seveda je velikost nadzora odvisna od različnih dejavnikov in konstrukcijskih rešitev, ki vključujejo lokacijo namestitve generatorjev, število generatorjev plazme, orientacijo elektrod in tok ter napetost generatorja plazme.

Z rezultati meritev na profilu smo predstavili spremembe toka fluida in samo generiranje vrtničnih struktur ob in za profilom v homogenem tokovnem polju zaradi uporabe plazma generatorjev.

Z več primeri smo v okviru rezultatov demonstrirali in ovrednotili rezultate z dokazi, da ima aktivni nadzor toka fluida s plazma generatorji sposobnost vplivanja na dogajanje v mejni plasti in potrditev, da je vredno nadaljevati raziskave v tej smeri na vetrnih turbinah.

Literatura

- [1] Orlov, D., and Corke, T. *Numerical simulation of aerodynamic plasma actuator effects. AIAA 43th Aerospace Sciences Meeting*, (2005)
- [2] Enloe, C. L., McLaughlin, T. E., VanDyken, R. D., Kachner, K. D., Jumper, E. J., and Corke, T. C., *Mechanisms and responses of a single di-electric barrier plasma actuator: Plasma morphology. AIAA Journal* 42 (2004)
- [3] Corke, T. C., in Post, M. L., *Overview of plasma flow control: Concepts, optimization, and applications. AIAA Paper, AIAA-2005-0563* (2005)
- [4] Corke, T.C., and Post, M.L., *Overview of Plasma Flow Control: Concepts, Optimization and Applications, AIAA paper 2005-0563, 43rd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV, Jan 10-13, (2005)*
- [5] IEEE-DEIS-EHD Technical Committee, *IEEE Trans. DEI* 10 (2003) 3-6
- [6] Potocar, E., Eberlinc, M., Širok, B., Hočevvar, M., *Control of separation flow over wind turbine blade with plasma actuators. To be published by J. of Mech. Eng.*, (2011)
- [7] Eberlinc, M., Širok, B., Hočevvar, M., *Experimental investigation of the interaction of two flows on the axial fan hollow blades by flow visualization and hot-wire anemometry. Exp. therm. fluid sci.*, 33, 929–937, (2009)
- [8] Donlagić, D., *Merjenje tlakov in temperatur*, Univerza v Mariboru, Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko, Maribor (2005)
- [9] Bajcar, T., Širok, B., Eberlinc, M., *Quantification of flow kinematics using computer-aided visualization, J. of Mech. Eng.*, 55, 215–223, (2009)
- [10] Compton, D. A., and Johnston, J. P. *Streamwise vortex production by pitched and skewed jets in a turbulent boundary layer. AIAA Journal* 30 (1992)
- [11] Seifert, A., Darabi, A., and Wagnanski, I., *Delay of airfoil stall by periodic excitation. Journal of Aircraft*, Vol. 33 (1996), 691-698
- [12] Roth, J. R., Sherman, D. M., and Wilkinson, S. P., *Boundary layer flow control with a one atmosphere uniform glow discharge surface plasma. AIAA Paper, AIAA 1998-0328* (1998)



Raziskave dinamike kaotičnih sistemov z uporabo večstopenjske homotopsko perturbacijske metode

R. Pušenjak¹ in M. Oblak²

Research of Dynamics of Chaotic Systems by Using Multistage Homotopic Perturbation Method

Povzetek. V članku je predstavljena večstopenjska modifikacija običajne homotopsko perturbacijske (H-P) metode, ki je primerna za obravnavo dinamike kaotičnih sistemov. Natančnost dobljenih rešitev je odvisna od števila členov potenčne vrste in od števila podintervalov, ki jih v metodi uporabimo. Značilnost rešitev je, da so dobljene v zaključeni obliki. Metoda je prikazana v izračunu avtonomnih nihanj Lorenzovega atraktorja v časovni domeni in pripadajočih faznih portretov. Natančnost rezultatov je preverjena s pomočjo numerične integracije enačb sistema z metodo Runge-Kutta.

Abstract. This paper presents the multistage modification of the standard homotopic perturbation (H-P) method, which is suitable to analyze the dynamics of the chaotic systems. The accuracy of computed solutions depends on number of terms used in power series and on the number of subintervals. Solutions are obtained in the closed form. The method is presented in the computation of autonomous oscillations of the Lorenz attractor in the time domain and computation of the corresponding phase portraits, respectively. Accuracy of the proposed method is checked by using numerical integration with Runge-Kutta solver.

1 Uvod

Homotopsko perturbacijsko metodo za analizo dinamičnih sistemov z velikimi nelinearnostmi je razvil kitajski matematik J. H. He [1-2]. Čeprav je metoda uspešna pri reševanju raznovrstnih nelinearnih problemov dinamike, opisanih v obliki nelinearnih parcialnih oziroma navadnih diferencialnih enačb, se pri kaotičnem sistemu kakršni je znameniti Lorenzov atraktor ne izkaže prav dobro, ker ponuja veljavne rešitve le na zelo

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za logistiko

² Univerza v Mariboru, Fakulteta za logistiko

omejenem časovnem intervalu, v katerem se kaos praviloma ne razvije v celoti. Rešitev iz te zagate ponuja modifikacija osnovnega algoritma na več časovnih intervalih, kjer uporabimo rešitve na koncu predhodnega intervala za začetne pogoje na naslednjem časovnem intervalu. Ker se izračunana rešitev v standardni metodi ob koncu daljšega časovnega obdobja razlikuje od prave rešitve, je očitno, da naredimo neko določeno napako tudi na koncu vsakega intervala večstopenjske (VH-P) metode, zato je rešitev na celotnem območju približna. V članku se omejimo na nelinearnosti v polinomski obliki (kot npr. pri Lorenzovem sistemu), zato lahko rešitev na vsakem posameznem časovnem intervalu in posledično tudi na celotnem območju izrazimo v analitični obliki, kar ponuja številne prednosti. Bistvo standardne homotopsko perturbacijske metode je uvedba homotopskega parametra p , ki lahko zavzame poljubno vrednost med 0 in 1. Če je $p=0$, se sistem običajno zreducira na dovolj preprosto obliko (na linearni sistem enačb), ki ga lahko enostavno rešimo v zaključeni obliki. Ko parameter p postopoma narašča proti vrednosti 1, sistem prehaja skozi zaporedje deformacij. Ko je $p=1$, sistem enačb preide v originalno obliko, končna stopnja deformacije pa da želeno rešitev. V večstopenjski homotopsko perturbacijski metodi ponavljamo ta postopek na vsakem časovnem intervalu posebej, kjer za začetne vrednosti rešitev uporabimo rešitve na koncu predhodnega časovnega intervala. Zaradi tega lahko celotni postopek reševanja opredelimo kot hibridno numerično-analitično računsko shemo. V nadaljevanju si bomo ogledali večstopenjsko homotopsko perturbacijsko metodo v splošnem.

2 Večstopenjska homotopsko perturbacijska metoda

Večstopenjska homotopsko perturbacijska metoda se naslanja na splošno znano dejstvo, po katerem moremo vsak (linearni ali nelinearni) dinamični sistem opisati v obliki navadnih diferencialnih enačb prvega reda:

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} + h_1(t, u_1, \dots, u_n) = f_1(t), \\ \frac{du_2}{dt} + h_2(t, u_1, \dots, u_n) = f_2(t), \\ \vdots \\ \frac{du_n}{dt} + h_n(t, u_1, \dots, u_n) = f_n(t), \end{cases} \quad (1)$$

s pripadajočimi začetnimi pogoji:

$$u_1(t_0) = c_1, u_2(t_0) = c_2, \dots, u_n(t_0) = c_n. \quad (2)$$

Predpostavimo, da nas rešitev enačb sistema zanima v časovnem intervalu $[t_0, t)$, ki ga razdelimo na j enakih podintervalov z dolžino Δt . Rešitev iščemo iterativno na podintervalih $[t_0, t_1), [t_1, t_2), [t_2, t_3), \dots, [t_{j-1}, t)$, pri čemer ne poznamo začetnih vrednosti na posameznih podintervalih z izjemo začetnih vrednosti ob času $t^* = t_0$. Homotopsko perturbacijsko metodo na posameznem podintervalu lahko najpreprosteje formuliramo tako, da zapišemo sistem DE (1) v operatorski obliki:

$$\begin{cases} L(\mathbf{u}) + \mathbf{N}(\mathbf{u}) - \mathbf{f} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{c}, \end{cases} \quad (3.a,b)$$

kjer je $L = \frac{d}{dt}$ linearni operator, $\mathbf{N}(\mathbf{u}) = \{N_1(u_1, \dots, u_n), N_2(u_1, \dots, u_n), \dots, N_n(u_1, \dots, u_n)\}^T$ je vektor nelinearnih operatorjev, $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^T$ je vektor generaliziranih koordinat sistema, $\mathbf{f} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}^T$ je vektor vzbujevalnih funkcij sistema, z zgornjim indeksom T pa so označeni transponirani (stolpni) vektorji. Za enačbo (3.a) konstruiramo homotopijo v obliki:

$$L(\mathbf{u}) - L(\mathbf{v}) + pL(\mathbf{v}) + p[\mathbf{N}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}] = \mathbf{0}, \quad (4)$$

kjer je $p \in [0, 1]$ vrinjeni parameter, vektor $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}^T$ pa je začetna aproksimacija rešitve, ki zadošča začetnim pogojem. Enačba (4) preide pri vrednosti perturbacijskega parametra $p=0$ na linearni sistem enačb, pri vrednosti $p=1$ pa v originalni nelinearni sistem enačb. Približno rešitev enačbe (3.a) izrazimo v obliki potenčne vrste:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0(t) + p\mathbf{u}_1(t) + p^2\mathbf{u}_2(t) + p^3\mathbf{u}_3(t) + \dots, \quad (5)$$

kjer so $\mathbf{u}_k, (k=1, 2, \dots)$ vektorske funkcije, ki jih moramo določiti. V ta namen vstavimo potenčno vrsto (5) v enačbo (4) in združimo koeficiente ob enakih potencah parametra p . Tako dobimo sistem enačb, ki ga sukcesivno rešujemo:

$$\begin{cases} p^0: L(\mathbf{u}_0) - L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}_0 = \mathbf{v}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{0} = \mathbf{0}, \\ p^1: L(\mathbf{u}_1) + L(\mathbf{v}) + \mathbf{N}(\mathbf{u}_0) - \mathbf{f} = \mathbf{0}, \\ p^2: L(\mathbf{u}_2) + \mathbf{N}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_0) = \mathbf{0}, \\ \vdots \end{cases} \quad (6)$$

Enačbe (6) so ključne za razumevanje metode: združevanje členov ob enakih potencah parametra p je perturbacijski postopek kar je poudarjeno tudi v imenu metode in omogoča analitično reševanje problema. Omenjeno združevanje je označeno za zavitim oklepajem in je od pripadajoče enačbe ločeno z dvopičjem. Nelinearnega operatorja ne razvijamo v vrsto oziroma ne lineariziramo, temveč po vstavljanju potenčne vrste (5) zberemo le tiste člene nelinearnega operatorja, ki dajo zahtevano potenco parametra p . Posledica tega je, da lahko metodo v povezavi s homotopijo uporabljamo pri velikih polinomskih nelinearnostih v analitični obliki.

Označimo začetni čas na poljubnem podintervalu s t^* in pripadajoči končni čas s t . Potem lahko celotni interval v standardni H-P metodi kot tudi prvi podinterval v VH-P metodi označimo s $[t^*=t_0, t)$, drugi podinterval v VH-P metodi s $[t^*=t_1, t)$, zadnji podinterval pa s $[t^*=t_{j-1}, t)$ in vse intervale oziroma podintervale obravnavamo na enak način. Kot začetne rešitve na poljubnem podintervalu izberemo kar začetne pogoje na vsakem podintervalu, ki se med seboj razlikujejo in jih smiselno z zgornjim načinom označevanja zapišemo v obliki:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}_0(t) = \mathbf{u}(t^*) = \mathbf{c}^* \quad (7)$$

kjer smo s \mathbf{c}^* označili vektor začetnih pogojev na poljubnem podintervalu. Komponente vektorja \mathbf{c}^* so vrednosti komponent vektorja $\mathbf{u}(t)$ na koncu predhodnega intervala. Sistem enačb sukcesivno rešujemo z uporabo inverznega linearnega operatorja:

$$L^{-1}(\cdot) = \int_{t^*}^t (\cdot) dt \quad (8)$$

pri enačbah (6) od potence p^1 dalje. Ker lahko funkcije $\mathbf{N}(\mathbf{u}_0)$, $\mathbf{N}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_0)$, ... izračunamo v predhodnih iteracijah, je operacija (8) izvršljiva. Približno rešitev prvotnega sistema enačb (3.a,b) dobimo sedaj s potenčno vrsto (5), v kateri iz praktičnih razlogov upoštevamo samo prvih m členov, pri čemer izvedemo na enačbi (5) limitni process s spreminjanjem $p \rightarrow 1$:

$$\Phi_m(t) = \lim_{p \rightarrow 1} \mathbf{u}(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{u}_k(t) \quad (9)$$

Algoritem VH-P metode je s tem utemeljen. Opisani algoritem lahko neposredno uporabimo pri simboličnem računanju v programskem okolju Mathematica®, kjer moramo v enačbo (3.a,b) vstaviti le vektorske funkcije nelinearnega kaotičnega sistema, ki ga obravnavamo.

3 Uporaba VH-P metode pri Lorenzovem atraktorju

Lorenzov atraktor predstavlja konvekcijski model determinističnega kaosa, ki je imel velik vpliv na razumevanje klimatskih in vremenskih pojavov. Enačbe Lorenzovega sistema zapišemo po vzoru na enačbo (1) v obliki:

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} - \sigma(u_2 - u_1) = 0, \\ \frac{du_2}{dt} - Ru_1 + u_2 + u_1u_3 = 0, \\ \frac{du_3}{dt} - u_1u_2 - bu_3 = 0, \end{cases} \quad (10)$$

kjer so spremenljivke u_1, u_2, u_3 proporcionalne konvekcijski hitrosti, temperaturni razliki med padajočim in dvigajočim se zračnim tokom in povprečnemu konvektivnemu toplotnemu pretoku, parametra σ, b in bifurkacijski parameter R pa so realne konstante. Kaos pri tem sistemu ne nastopi vselej, temveč le tedaj, ko ima bifurkacijski parameter R ustrezno vrednost. V operatorski obliki (3.a,b) zapišemo enačbe takole:

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\sigma(u_2 - u_1) \\ -Ru_1 + u_2 + u_1u_3 \\ -u_1u_2 - bu_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \\ u_3(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}, \quad (11)$$

kjer smo pridružili še pripadajoče začetne pogoje Lorenzovega sistema enačb.

S ponovitvijo splošnega postopka, prikazanega v prejšnjem razdelku, dobimo z združevanjem koeficientov ob enakih potencah parametra p naslednje enačbe ($' = d/dt$):

$$p^0: \begin{cases} u_{1,0}'(t) - v_1'(t) = 0, & u_{1,0}(t) = v_1(t) = c_1, & \Rightarrow & 0 = 0, \\ u_{2,0}'(t) - v_2'(t) = 0, & u_{2,0}(t) = v_2(t) = c_2, & \Rightarrow & 0 = 0, \\ u_{3,0}'(t) - v_3'(t) = 0, & u_{3,0}(t) = v_3(t) = c_3, & \Rightarrow & 0 = 0, \end{cases} \quad (12.a)$$

$$p^1: \begin{cases} u_{1,1}'(t) - \sigma[u_{2,0}(t) - u_{1,0}(t)] = 0, \\ u_{2,1}'(t) - Ru_{1,0}(t) + u_{2,0}(t) + u_{1,0}(t)u_{3,0}(t) = 0, \\ u_{3,1}'(t) - u_{1,0}(t)u_{2,0}(t) - bu_{3,0}(t) = 0, \end{cases} \quad (12.b)$$

$$p^2: \begin{cases} u_{1,2}'(t) - \sigma[u_{2,1}(t) - u_{1,1}(t)] = 0, \\ u_{2,2}'(t) - Ru_{1,1}(t) + u_{2,1}(t) + u_{1,1}(t)u_{3,0}(t) + u_{1,0}(t)u_{3,1}(t) = 0, \\ u_{3,2}'(t) - u_{1,0}(t)u_{2,1}(t) - u_{1,1}(t)u_{2,0}(t) - bu_{3,1}(t) = 0, \end{cases} \quad (12.c)$$

⋮

Sistem enačb (12.a) je trivialen in ga izključimo iz postopka. Enačbe (12.b) lahko integriramo z upoštevanjem začetnih pogojev $u_{i,k}(0) = 0, (i = 1, 2, 3; k = 1, 2, \dots)$ tako da dobimo rešitve $u_{i,1}(t), (i = 1, 2, 3)$ na poljubnem podintervalu v eksplisitni obliki:

$$\begin{cases} u_{1,1}(t) = \sigma(c_2 - c_1)(t - t^*) \\ u_{2,1}(t) = (Rc_1 - c_2 - c_1c_3)(t - t^*) \\ u_{3,1}(t) = (c_1c_2 + bc_3)(t - t^*) \end{cases} \quad (13)$$

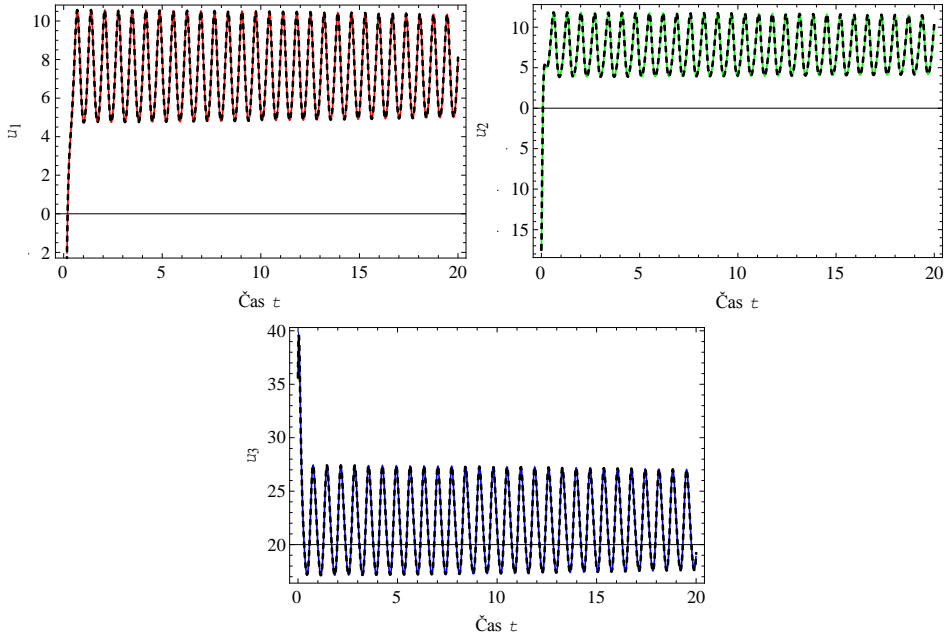
Če vstavimo dobljene rešitve $u_{i,1}(t)$ in začetne rešitve $u_{i,0}(t) = c_i, (i = 1, 2, 3)$ v enačbe (12.c), lahko integriramo tudi te in dobimo s tem rešitve $u_{i,2}(t), (i = 1, 2, 3)$. Postopek nadaljujemo s simboličnim računanjem v Mathematici® tako da vključimo v potenčno vrsto (5) zadostno število členov. Dobljene rešitve $u_{i,k}(t), (i = 1, 2, 3; k = 1, 2, \dots)$ vstavimo v enačbo (9) in tvorimo približne rešitve na obravnavanem podintervalu. Izračunane vrednosti na koncu podintervala uporabimo za začetne vrednosti na naslednjem podintervalu. Celotni postopek nato ponovimo na naslednjem podintervalu.

4 Rezultati

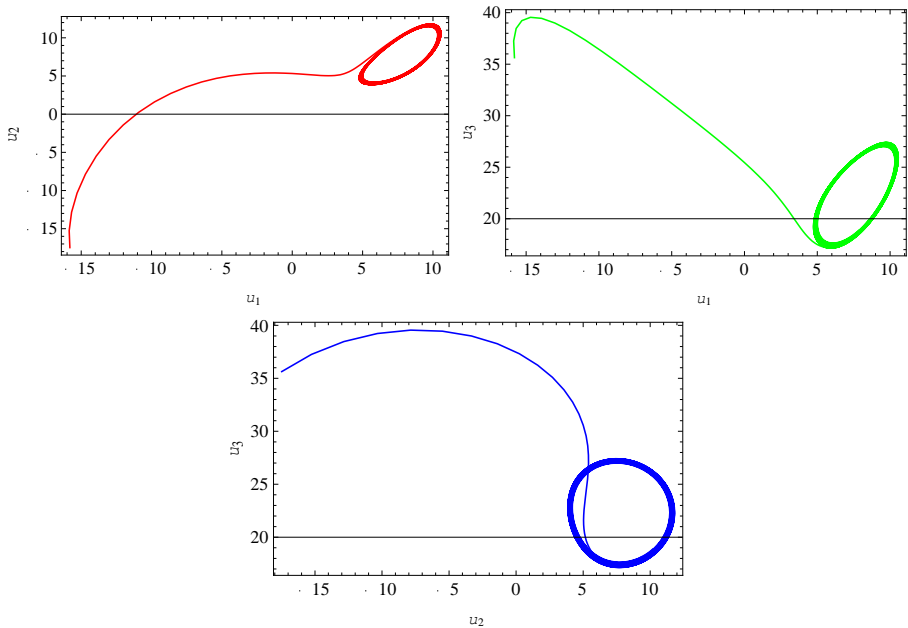
Izračun nihanj Lorenzovega atraktorja si bomo ogledali pri vrednostih parametrov $\sigma = 10, b = -\frac{8}{3}$ in začetnih pogojih $u_1(0) = -15.8, u_2(0) = -17.48$ ter $u_3(0) = 35.64$.

Rešitev opazujemo na časovnem intervalu $[0, 20]$. Pri vrednosti bifurkacijskega parametra $R = 23.5$ kaos ne nastopi, kar je razvidno iz časovnih potekov spremenljivk $u_i(t), (i = 1, 2, 3)$ na sliki 1 in faznih portretov na sliki 2. Fazni portreti na sliki 2 se zaključijo z limitnim ciklom, ki dokazuje, da po prehodnem pojavu ostane le še periodično nihanje. Časovni poteki $u_i(t)$ z VH-P metodo so dobljeni z upoštevanjem 10 členov potenčne vrste (5) ter dolžino časovnega podintervala $\Delta t = 0.01$. Poteki $u_i(t)$ na sliki 1 so prikazani s polno izvlečeno črto, za primerjavo pa so prikazani tudi časovni poteki

spremenljivk $u_i(t)$, dobljeni z numerično integracijo po metodi Runge-Kutta z dolžino časovnega koraka $\Delta t = 0.001$, ki so narisani črtkano. Iz primerjave izračunanih potekov izhajajo zelo dobro ujemanje rezultatov po obeh metodah.

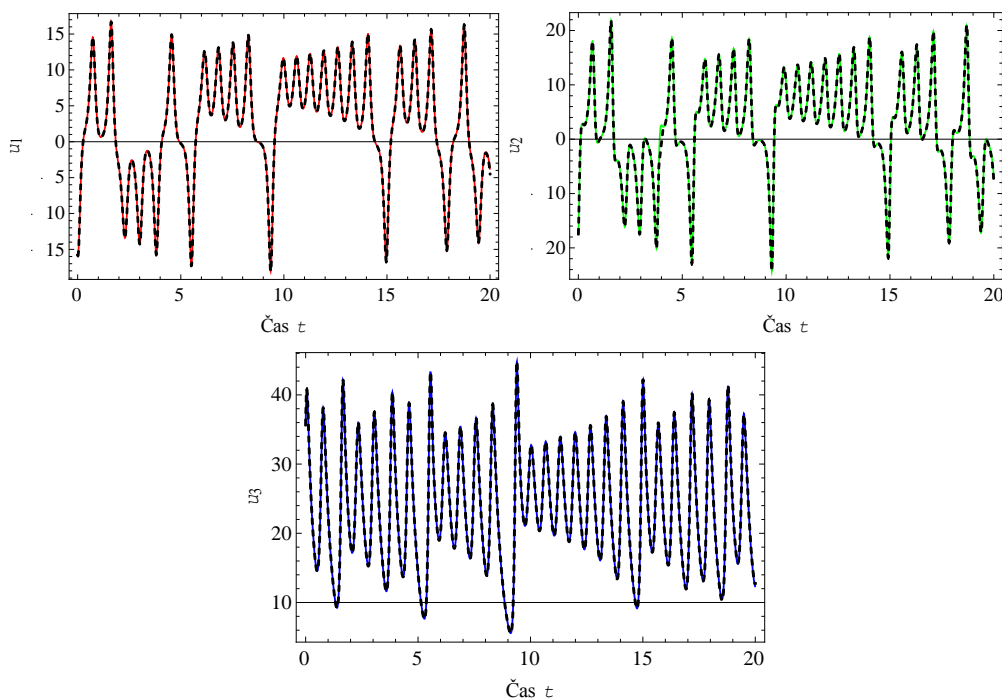


Slika 1. Časovni potek nihanja spremenljivk $u_i(t)$, ($i=1,2,3$) Lorenzovega atraktorja pri $R=23.5$



Slika 2. Fazni portreti u_1-u_2 , u_1-u_3 in u_2-u_3 Lorenzovega atraktorja pri $R=23.5$

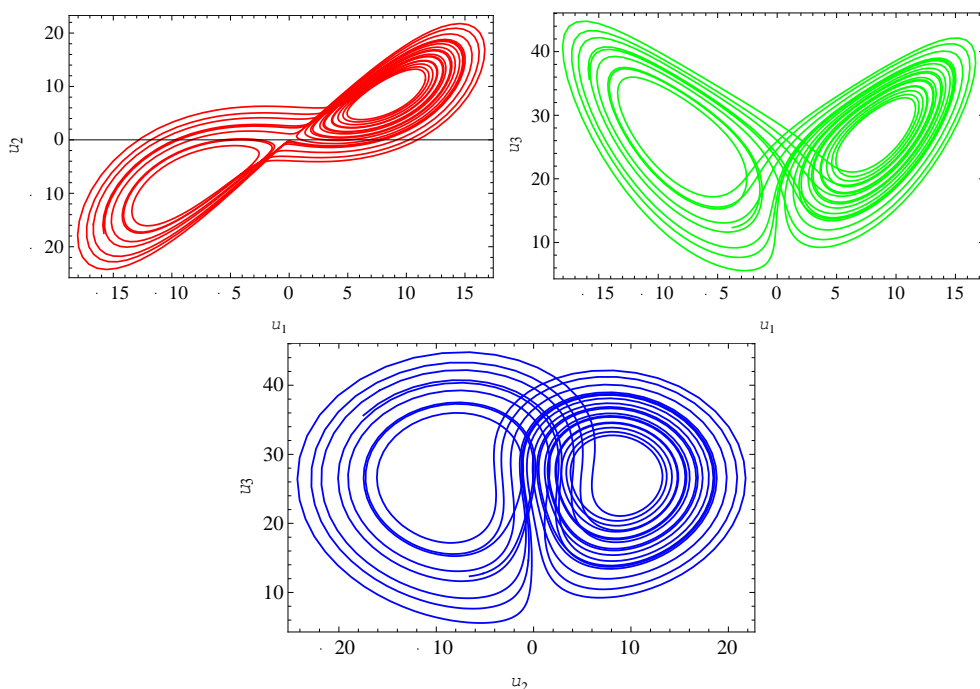
Pri vrednosti $R=28$ in ostalih nespremenjenih vrednostih parametrov nastopi kaotično nihanje Lorenzovega atraktorja. V VH-P metodi še vedno upoštevamo 10 členov potenčne vrste (5), vendar pa zmanjšamo dolžino podintervalov na $\Delta t = 0.001$, kar je obenem dolžina koraka v metodi Runge-Kutta, uporabljeni za primerjavo. Časovni poteki spremenljivk $u_i(t)$, ($i=1,2,3$) so prikazani na sliki 3, fazni portreti pa na sliki 4. Iz časovnih potočkov $u_i(t)$ in faznih portretov izhaja, da limitni cikli v tem primeru ne obstojajo, temveč so trajektorije nepredvidljive, čeprav v fazni ravnini izrišejo prepoznavne vzorce, ki so podvrženi strogim zakonitostim. Dejstvo, da so vzorci v fazni ravnini urejeni, je značilnost determinističnega kaosa. Časovni poteki $u_i(t)$, dobljeni z VH-P metodo, so na sliki 3 ponovno prikazani s polno izvlečeno črto, črtkano pa poteki, dobljeni s pomočjo numerične integracije po metodi Runge-Kutta. Rezultati po obeh metodah se zelo dobro ujemajo.



Slika3. Časovni potek nihanja spremenljivk $u_i(t)$, ($i=1,2,3$) Lorenzovega atraktorja pri $R=28$

Število podintervalov j in število členov potenčne vrste m sta med seboj neodvisna parametra. Natančnost povečujemo z večanjem števila m ob izpolnjenem pogoju $|\mathbf{u}_k(t)| < \varepsilon_1$, $k \geq m$. Z zadostnim številom podintervalov j pa predvsem zagotavljamo, da je napaka med zaporednima rešitvama $\mathbf{u}^{(j-1)}(t)$ in $\mathbf{u}^{(j)}(t)$, kjer prva vsebuje $j-1$ podintervalov, druga pa j podintervalov, na vsem intervalu $[t_0, t)$ manjša od predpisane tolerance ε_2 :

$$\int_{t_0}^t |u_i^{(j)}(t) - u_i^{(j-1)}(t)| dt < \varepsilon_2, \quad (i=1,2,3) \quad (14)$$



Slika4. Fazni portreti u_1 - u_2 , u_1 - u_3 in u_2 - u_3 Lorenzovega atraktorja pri $R=28$

5 Zaključek

V članku je predstavljena zanesljiva hibridna numerično-analitična metoda za izračun kaotičnih nihanj dinamičnih sistemov, ki temelji na povezavi homotopije s perturbacijsko tehniko tako da jo uporabljamo na več podintervalih prvotnega časovnega obdobja in kot začetne pogoje podintervala uporabimo izračunane vrednosti na koncu predhodnega intervala. Zaradi uporabe homotopije daje VH-P metoda analitične rešitve dinamičnih sistemov determinističnega kaosa z velikimi polinomskimi nelinearnostmi, kar je njena poglobitna prednost. Natančnost izračunanih rešitev lahko povečujemo s povečanjem števila členov potenčne vrste kot tudi s povečanjem števila podintervalov. Izkaže se, da se rezultati zelo dobro ujemajo z numeričnimi izračuni ob uporabi metode Runge-Kutta.

Zahvala

Delo je nastalo v okviru raziskovalnega programa programske skupine P2-0137 "Numerična in eksperimentalna analiza nelinearnih mehanskih sistemov", ki ga sofinancira MZT Republike Slovenije.

Literatura

- [1] J. H. He, *Homotopy perturbation technique*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 178, 257--262, 1999.
- [2] J. H. He, *A coupling method of homotopy technique and perturbation technique for nonlinear problems*, Int. J. Non-Linear Mech. 35(1), 37--43, 2000.



Numerična analiza zgorevanja KOEL v mali kurilni napravi

B. Rajh¹, M. Zadavec², N. Samec³, M. Hriberšek⁴

Numerical analysis of extra light fuel oil combustion in a small burning device

Povzetek. Prispevek predstavlja numerično analizo zgorevanja kapljevitega goriva KOEL (kurilno olje ekstra lahko) v mali kurilni napravi. Analiza je bila narejena s pomočjo programskega paketa ANSYS CFX 13 za optimalno določen relativni razmernik zraka (λ_{opt}) na podlagi eksperimentalnih meritev ter srednjo moč oljnega gorilnika Weishaupt WL5/1-A (37 kW). V okviru numerične analize je bil cilj ugotoviti, ali so na podlagi eksperimentalno določenega λ_{opt} zagotovljeni pogoji popolnega zgorevanja. Primerjava rezultatov numeričnega izračuna in izmerjenih vrednosti kaže na primernost izbranega numeričnega modela.

Abstract. This paper focuses on the numerical analysis of the combustion of the liquid fuel extra light fuel oil in a small burning device. The calculation was performed by ANSYS CFX 13 computer code for experimental optimal air – fuel ratio (λ_{opt}) and the middle force of the oil burner Weishaupt WL5/1-A (37 kW). The goal of the numerical analysis was to find out, whether the experimentally determined λ_{opt} ensured the conditions for complete combustion. The comparison of results of numerical calculation and measured values shows the suitability of the chosen numerical model.

1 Uvod

Podrobna analiza procesa zgorevanja v dejanskih razmerah obratovanja posamezne kurilne naprave zahteva istočasno obravnavanje vseh prenosnih in reakcijskih pojavov reaktivnega toka in je potrebno poleg reakcijske kinetike upoštevati še vpliv konvekcije, difuzije in ostale oblike prenosa fizikalnih količin. Vse našteje pojave je tekom eksperimenta zelo težko in skoraj nemogoče spremljati, zato se pri obravnavanju in podrobnejši analizi procesov zgorevanja kot tudi za optimizacijo zgorevalnih naprav v industriji vse bolj razširja uporaba računalniške dinamike tekočin (RDT). Največja težava pri modeliranju turbulentnega reaktivnega toka je, da večina numeričnih modelov temelji na empiričnih predpostavkah in je

¹ KIV d.d., Vransko 66, 3305 Vransko

^{2,3,4} Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

potrebno izvesti eksperiment, da lahko določimo manjkajoče parametre, ki so potrebni za ustrezen numerični model.

2 Turbulentni reaktivni tok

To, kakšen je turbulenten plamen, je v največji meri odvisno od same narave reaktivnega toka. Pri dovolj velikem Reynoldsovem številu postane tok turbulenten. Tok je nemiren in neurejen ter vsebuje vrtince različnih velikosti, ki se gibljejo z različno stopnjo rotacijskega in translatornega gibanja po prostoru. Kontura turbulentnega plamena ni stalna in se neprestano spreminja, prav tako je nestalna fronta plamena katera mejna površina je zelo razgibana. In prav takšen plamen je značilen za zgorevanje KOEL v mali kurilni napravi. Številni avtorji navajajo, da je natančno definicijo turbulentnega reaktivnega toka zelo težko podati. Znano pa je, da je za takšen tok značilna velika neurejenost, velika vrednost Reynoldsovega števila, 3D fluktuacija vrtincev, disipacija in turbulentna difuzija, ki povzroča hitro mešanje reaktantov in povečuje razmerje med gibalno količino ter prenosom snovi in toplote.

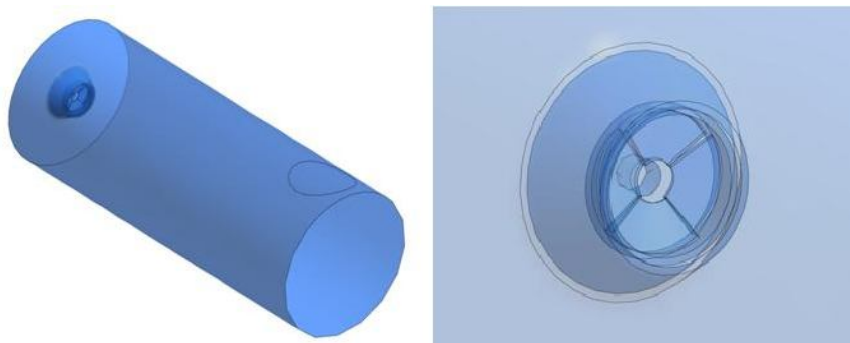
Zadovoljiv popis gibanja stisljivega viskozne dvosestavnega turbulentnega reaktivnega toka lahko podamo z zadostnim številom medsebojno odvisnih parcialnih diferencialnih enačb imenovane Navier – Stokesove enačbe s pomočjo Reynoldsovega povprečenja (RANS enačbe), ki temeljijo na osnovi statistične obravnave. Z uporabo RANS enačb se pojavijo v gibalni in energijski enačbi dodatni členi, ki jih imenujemo Reynoldsove napetosti. Ti tokovi so modelirani z uvajanjem turbulentne viskoznosti η_t , ki jo lahko določimo z uporabo ustreznih turbulentnih modelov, s katerimi zaključimo sistem RANS enačb. Sistemu RANS enačb ohranitve mase, energije in gibalne količine je potrebno dodati še difuzivno – konvektivno enačbo prenosa snovi oziroma enačbo o ohranitvi masnega deleža (ξ_n) n – te sestavine reaktivnega toka, ki ima zaradi Reynoldsovega povprečenja dodatni člen, ki ga imenujemo turbulentni tok masnega deleža (turbulentni snovski tok). Izvirne člene energijske in snovske prenosne enačbe določimo s pomočjo ustreznih turbulentnih modelov zgorevanja. V vsakem primeru pa izvirni člen vnaša v prenosno enačbo dodatno nelinearnost, kar lahko povzroča precej težav pri numeričnemu reševanju enačb z uporabo ene izmed aproksimativnih metod reševanja.

3 Numerični model zgorevanja KOEL

Na podlagi eksperimentalnih meritev emisij dimnih plinov, ki smo jih izvedli s pomočjo analizatorja dimnih plinov za različne relativne razmernike zraka ($\lambda=1,15$, $\lambda=1,2$ in $\lambda=1,3$), smo določili optimalni relativni razmernik zraka $\lambda_{opt} = 1,2$, ki omogoča dobro delovanje kurilne naprave pri različnih spremembah okolja (nenehne spremembe tlaka zraka, temperature zraka, samega tlaka v kurišču in drugi vplivni faktorji) skozi en servisni interval. V okviru eksperimenta smo tako pridobili tudi določene podatke, ki so bili potrebni za izdelavo numeričnega modela kot je določitev λ_{opt} , ki predstavlja najugodnejše pogoje obratovanja, pridobitev natančne geometrije kotla, oljnega gorilnika in podatke o šobi. S pomočjo RDT smo nato poskušali definirati ustrezen numerični model s pomočjo katerega bi lahko preverili, ali smo v okviru eksperimenta določili pravičen λ_{opt} , in če so zagotovljeni pogoji popolnega zgorevanja.

3.1 Geometrija numeričnega modela

Za pripravo ustreznega numeričnega modela je bilo potrebno najprej oblikovati geometrijo modela, ki zajema: zgorevalni prostor v naravni velikosti, plamenico oljnega gorilnika skupaj z zastojno ploščo za dovod zgorevalnega zraka in šobo za dovod goriva. Posebno pozornost smo namenili kreiranju plamenice oljnega gorilnika, zastojni plošči in dovodu goriva, saj smo želeli zajeti vpliv vrtnčenja zračnega toka, ki ga ustvarja zastojna plošča gorilnika. Določene detajle dejanskega zgorevalnega prostora, ki nimajo prevladujočega vpliva na samo dogajanje v zgorevalnem prostoru pa smo poenostavili ali zanemarili.



Slika 1: Geometrija in detajlna slika plamenice in glave oljnega gorilnika

3.2 Računska mreža

Izbiri ustrezne računske mreže smo posvetili veliko pozornost, uskladiti in prilagoditi je bilo potrebno velikost kontrolnih volumnov mreže glede na velikost šobe in samega zgorevalnega prostora. V področju pričakovane fronte plamena je bilo potrebno mrežo ustrezno zgostiti, da bi učinkovito zajeli kompleksne prostorske pojave turbulentnega zgorevanja. V nasprotnem primeru bi bili rezultati premalo natančni in bi se slika dejanskega dogajanja zelo popačila. Izbira gostote mreže neposredno vpliva na število kontrolnih volumnov, ob tem pa večje število le - teh zelo podaljša čas izračuna. S stališča prihranka časa izračuna je torej smotno, da se izbere čim manjše število volumnov, ki še zagotavljajo kvalitetne rezultate ob primernih časih računanja. Vendar pa moramo pri tem upoštevati tudi velikost in obliko kontrolnih volumnov na kritičnih mestih, ki morajo biti ustrezno zamreženi. Lahko se namreč zgodi, da neustrezna oblika in velikost mreže na teh mestih vpliva na samo konvergenco rezultatov. Z upoštevanjem vsega navedenega smo uporabili 705.881 kontrolnih volumnov.

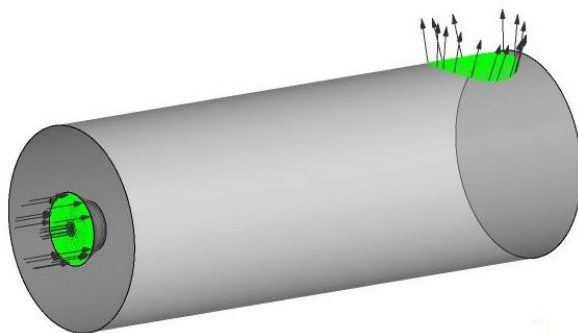
3.3 Parametri numeričnega modela

Sistem ohranitvenih RANS enačb obravnavanega problema je bil reševan s pomočjo dvoenačbnega turbulentnega $k - \epsilon$ modela. Uporabljen je bil numerični EDC model zgorevanja, ki temelji na konceptu, da so kemijske reakcije relativno hitre v primerjavi s prenosnimi pojavi. Za sevalni model smo izbrali P1 sevalni model, ki se je izkazal za najustrežnejšega. Preračun je bil izveden kot časovno – odvisen (tranzienten) in omejen na čas 1 sekundo, v katerem bi se naj vzpostavilo periodično tokovno polje. Sam preračun ohranitvenih enačb se je izvajal v časovnih korakih 0,008 sekunde. Znotraj vsakega časovnega koraka pa je bilo potrebno predpisani še deset dodatnih nelinearnih iteracij, da smo zagotovili pogoje popolne konvergence. V našem primeru je bil podan konvergenčni kriterij 10^{-4} , kar daje zadovoljivo natančnost preračuna. V računskem območju sta bili izbrani

tudi dve točki, v katerih se je tekom izračuna spremljala vrednost hitrosti. Nihanje hitrosti v teh dveh točkah se je po določenem času ustalilo oziroma je postalo nihanje periodično z minimalno amplitudo, kar nakazuje na približno ustaljeno rešitev tokovnega polja v določenih točkah.

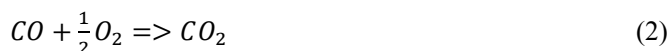
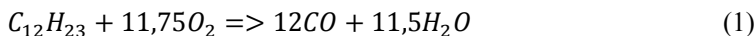
3.4 Robni pogoji

Uporabljen je bil dvofazni sistem uparjanja / zgorevanja olja z zrakom. Potrebni predpostavljeni robni pogoji so bili predpisani na: **VSTOPU** (masni pretok goriva, masni pretok zraka), **IZSTOPU** (tlak) in **POVRŠINI PLAŠČA KOTLA** (predpisan robni pogoj na steni – prestop toplote (odvedeni toplotni tok), brezždrski robni pogoj – $v=0$, zlepljanje kapljic na steno). Intenziteto turbulentnega gibanja zraka, ki prehaja skozi zastojno ploščo v zgorevalni prostor je zelo težko določiti, zato smo se odločili za srednjo intenziteto (5 %). Določene robne pogoje kot je vstopni masni tok goriva, masni tok dovoda zraka, srednji premer kapljice je bilo potrebno oceniti, jih večkrat spreminjati in izbrati ustrezne numerične modele, da bi dobili podobne razmere, v katerih je bil izveden eksperiment, kajti na voljo nismo imeli vseh prostorskih meritev veličin, ki nastopajo v procesu zgorevanja in ki jih bi bilo mogoče pri samem eksperimentu tudi meriti.



Slika 2: Predpisani robni pogoji

Numerični model zgorevanja / uparjanja olja temelji na modelu izparevanja tekočin. Uporabljen model zgorevanja KOEL vsebuje kot osnovno gorivo $C_{12}H_{23}$ (povprečna sestava KOEL) kot čisto substanco, s predpisanimi ustreznimi snovskimi lastnostmi ($\rho = 840 \text{ kg/m}^3$, $\eta = 0,00336 \text{ kg/ms}$, $\lambda = 0,14 \text{ W/mK}$, uparjalna toplota = 280 kJ/kg pri 70°C) in izpareva v njeno ekvivalentno plinsko fazo. Plinska faza olja je del spremenljive zmesne plinske mešanice, ki zgoreva po enostopenjski kemijski reakciji v dveh stopnjah. V prvi stopnji reakcija specificira plinsko fazo in O_2 kot reaktanta in CO in H_2O kot produkta zgorevanja (enačba 1), v drugi stopnji pa CO in O_2 kot reaktanta in CO_2 kot produkt zgorevanja (enačba 2). Dodatno pa je bil v model vključen nastanek NO_x (termičnega NO) na podlagi Zeldovichevega mehanizma.



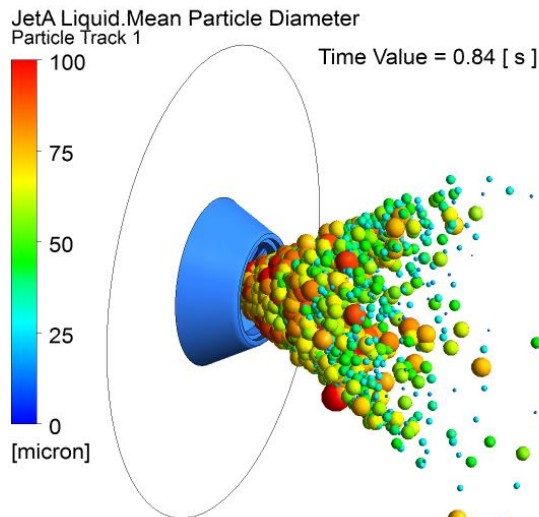
Za popis samega gibanja oljnih kapljic je bil uporabljen Lagrange – ov model sledenja delcev, kjer je bilo potrebno upoštevati, da se oljna kapljica giblje skozi zvezno sestavino plinske faze. Sile, ki delujejo na vsako posamezno oljno kapljico in vplivajo na pospeševanje le - te, nastopijo zaradi razlik med hitrostmi oljne kapljice in plinske faze, ter prav tako zaradi izpodrivanja plinske faze. Upoštevali smo, da na vsako oljno kapljico deluje sila vzgona F_{vzg} in sila upora F_{up} (sestavljena iz sile trenja in dinamičnega vzgona), ostale sile pa smo zanemarili, saj je gostota oljnih kapljic dosti večja od gostote plinske faze:

$$m_p \frac{dv_p}{dt} = - \underbrace{\frac{1}{8} \pi \rho_f d^2 C_D |v_f - v_p| (v_f - v_p)}_{F_{up}} + \underbrace{\frac{1}{6} \pi d^3 (\rho_p - \rho_f) g}_{F_{vzg}} \quad (3)$$

Dejanska porazdelitev oljnih kapljic, ki je funkcija razprševalne šobe in parametrov razprševanja, smo definirali s pomočjo Rosin – Rammler porazdelitvene funkcije:

$$R = \exp \left[- \left(\frac{d}{d_e} \right)^n \right] \quad (4)$$

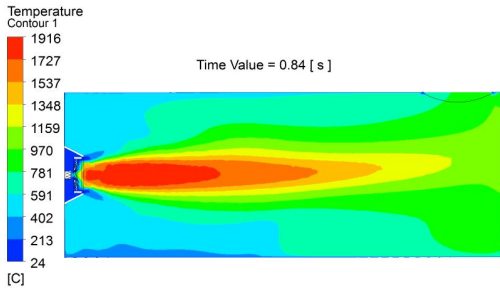
kjer smo predpisali srednji premer $d_e = 55 \mu m$ in faktor enakomernosti $n = 2,8$. Nato smo predpisali razprševanje v obliki votlega stožca s kotom 60° , začetno hitrostjo vbrizga 28 m/s in temperaturo oljne kapljice na začetku vbrizga 70°C . Na sliki 3 je prikazano, da so največje oljne kapljice na začetku razprševanja, kjer je njihova velikost v velikostnem območju $100 \mu m$. Nadalje oljne kapljice razpadajo v še manjše in se uparijo s čimer so doseženi pogoji finosti razprševanja. Oljne kapljice takšnega velikostnega razreda predstavljajo podobne razmere v katerih je bil izveden eksperiment. S stališča modeliranja procesa zgorevanja pa je vsekakor potrebno, da so kapljice različnih premerov, ki gorijo različno dolgo, saj je le na tak način omogočeno formiranje stabilnega plamena.



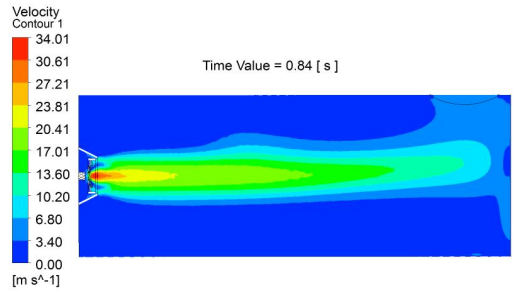
Slika 3: Porazdelitev in velikost oljnih kapljic

4 Rezultati in diskusija

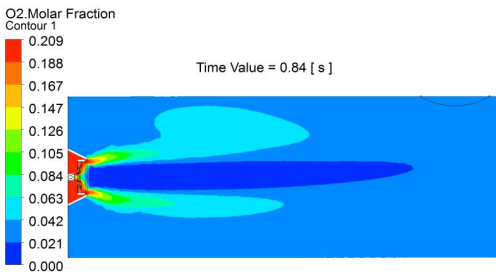
Plamen je značilna karakteristika zgorevanja, ki zajema ozko področje, v katerem potekajo osnovni fizikalni – kemijski procesi oksidacije in se širi skozi prostor napolnjen z reaktanti ter ga lahko v večini primerov vidimo, kar je posledica prisotnost različnih temperatur in molekul vmesnih produktov zgorevanja.



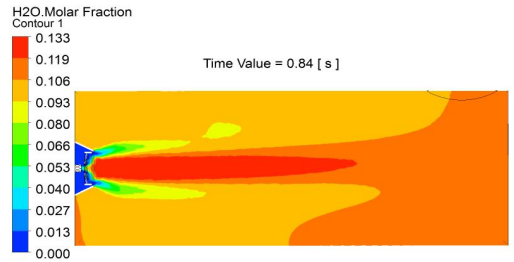
4a) Temperaturno polje plamena



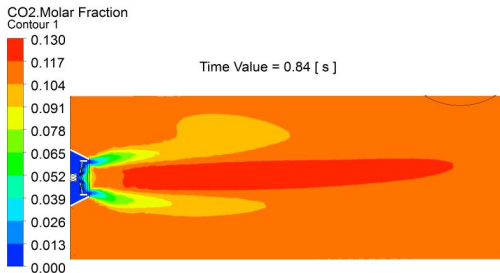
4b) Hitrostno polje



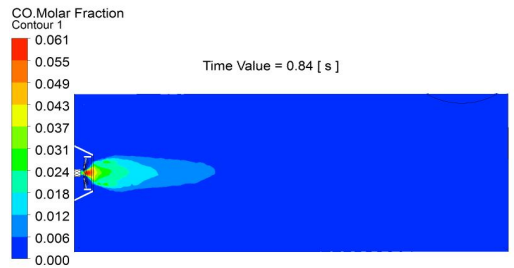
4c) Polje koncentracij zraka (O_2)



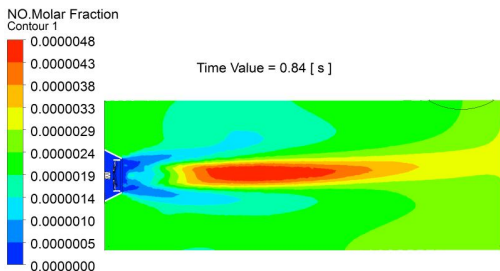
4d) Polje koncentracij H_2O



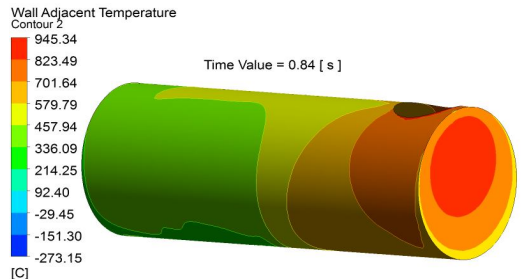
4e) Polje koncentracij CO_2



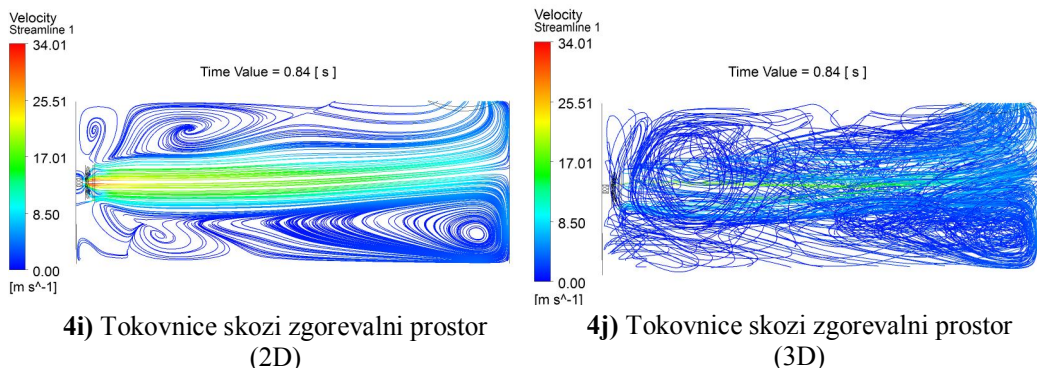
4f) Polje koncentracij CO



4g) Polje koncentracij NO



4h) Temperaturna obremenitev stene zgorevalne naprave



Slika 4: Rezultati numeričnega izračuna

Visoke temperature nastajajo v sami coni plamena, kar pomeni, da je samo temperaturno polje v najvišjem območju temperatur hkrati prikaz položaja samega plamena (Slika 4a). Ugotovimo lahko tudi, da v fronti plamena nastopajo veliki temperaturni gradienti in spremembe sestave reaktivnega toka, označujejo pa ga maksimalne temperature zgorevanja, katere vrednosti so odvisne od λ in toplotne izmenjave z okolico. Iz hitrostnega polja (Slika 4b) lahko ugotovimo, da se največje hitrosti nahajajo v središču plamena, kar je razumljivo, saj je tam največji vpliv velikih temperaturnih gradientov na gostoto in posledično preko gibalne enačbe na komponente hitrosti. Polje koncentracij porabe zraka oziroma O_2 je v coni zgorevanja, kjer se zelo hitro porablja (Slika 4c). Porazdelitev presežka masne koncentracije O_2 se relativno enakomerno porazdeli zunaj plamena po celotnem zgorevalnem prostoru. Koncentracija H_2O (vodne pare) (Slika 4d) in CO_2 (Slika 4e) po vstopu O_2 v zgorevalni prostor skokovito naraste v sami coni plamena, saj kemijska reakcija zgorevanja intenzivno poteka ravno v središču plamena, kjer je tudi najvišja temperatura. Nato se koncentracija enakomerno porazdeli po celotnem zgorevalnem prostoru, kar je tudi za pričakovati, saj je CO_2 kot tudi H_2O (vodna para) produkt popolnega zgorevanja. Indikator nepopolnega zgorevanja je prisotnost CO v produktih zgorevanja (Slika 4f) oziroma v dimnih plinih. Največje koncentracije CO se pojavljajo tik pred cono plamena na strani dovoda goriva, nadalje pa je zgorevanje popolno, kar kaže na to, da je dovolj zraka in da so zagotovljeni pogoji popolnega zgorevanja. Termični NO predstavlja 95 % celotnih NO_x , ki nastajajo pri zgorevanju KOEL (Slika 4g). Največje koncentracije NO se pojavljajo ravno v področju plamena, kjer so tudi največje temperature in dovolj O_2 za oksidacijo N_2 . Vzrok za nastanek termičnega NO so predvsem visoke temperature, ki so v bližini fronte plamena. Za njihov nastanek je potrebna dovolj velika količina O_2 , ki nato reagira z N_2 , kar vodi do nastanka termičnega NO . Iz temperaturne obremenitve stene zgorevalne naprave (Slika 4h) lahko razberemo, da je temperaturno najbolj obremenjena zadnja stena, zaradi spremenljive dolžine plamena. 2D tokovnice (Slika 4i) in 3D tokovnice (Slika 4j) nam podajajo natančno informacijo o dogajanju znotraj zgorevalnega prostora. Vidimo, da je v našem primeru tok izrazito turbulenten in popolnoma neurejen. Numerični rezultati potrjujejo pravilen izbor λ_{opt} v okviru eksperimenta in s tem pogoje popolnega zgorevanja.

4.1 Primerjava numeričnih rezultatov in rezultatov meritev

Da bi pridobili informacijo o ustreznosti numeričnega modela, je bilo potrebno numerične rezultate ustrezno ovrednotiti. Naredili smo primerjavo med numeričnimi rezultati, rezultati izvedenih eksperimentalnih meritev, analitičnim izračunom, ki temelji na reševanju empiričnih stehiometričnih enačb za kapljevita goriva, kot tudi z rezultati, ki jih je mogoče zaslediti v literaturi in ugotovili, da se dobro ujemajo (napaka manjša od 5 %).

Tabela 1: Primerjava rezultatov

$\lambda = 1,2$	CFX [vol. %]	Eksperiment [vol. %]	Analitični izračun [vol. %]	Literatura [3] [vol. %]	Literatura [4] [vol. %]
O _{2,vlažni}	3,22	3,16	3,32	3,4	3,28
O _{2,suhi}	3,61	3,5	3,71	3,77	3,69
CO _{2,suhi}	12,72	12,8	12,62	12,6	12,74

Do odstopanj med numeričnimi in eksperimentalnimi rezultati prihaja, zaradi zanemarjanja vpliva atomizacije goriva v oljne kapljice v okviru numerične analize, pri eksperimentu pa bi bilo potrebno upoštevati tudi nenehne spremembe tlaka zraka, temperature zraka, samega tlaka v kurišču in tudi druge vplivne faktorje. Kljub tem poenostavitvam numerični model dovolj natančno opiše fizikalno dogajanje v samem zgorevalnem prostoru.

5 Zaključek

V prispevku je bilo prikazano, da lahko s pomočjo ustreznih numeričnih modelov znotraj RDT dovolj dobro opišemo dogajanje turbulentnega zgorevanja kapljevitega goriva kot tudi dogajanje znotraj zgorevalnega prostora, kar je bilo potrjeno na prikazanem primeru zgorevanja KOEL v mali kurilni napravi. Dobro nastavljen oljni gorilnik lahko pomeni tudi do 10 % in več prihranka pri samem gorivu. Prav zato je pomembna kontrola zgorevanja in pravilen izbor λ_{opt} , s pomočjo katerega ugotovimo, ali dosegamo optimalno zgorevanje ali ne, saj lahko že 1 % CO v dimnih plinih povzroči povečanje izgub kotla za 4 do 5 %.

Zahvala: »Operacijo delno financira Evropska unija, in sicer iz Evropskega socialnega sklada.«

Literatura

- [1] B. Rajh, *Eksperimentalno - numerična analiza zgorevanja KOEL v mali kurilni napravi*, diplomsko delo, Maribor, 2008.
- [2] ANSYS – CFX 13.0, 2010.
- [3] Weishaupt, *Technische Arbeitsblätter*, 2001.
- [4] J. Oman, A. Senegačnik, A. Mirandola: *Air, fuels and flue gases: physical properties and combustion constants*, Padova: Progetto, 106--109, 2006.



Simulacija ogrevanja in prezračevanja bazena z računsko dinamiko tekočin

M. Ramšak¹ in M. Čontala²

Simulation of pool heating and ventilation using computational fluid dynamics

Povzetek. V prispevku smo prikazali numerično simulacijo ustaljenih termo hidravličnih razmer pri toplozračnem ogrevanju in prezračevanju hišnega bazenskega prostora z računsko dinamiko tekočin. Namen naloge je preveriti projektirano izvedbo prezračevanja na morebitni pojav kondenzacije. Za simulacijo vlažnosti smo uporabili dodatno transportno enačbo za vlažnost. Najpomembnejši del izračuna predstavlja robni pogoj količine izhlapele vode na gladini bazena, ki smo ga določili z empiričnim izrazom po ameriškem standardu ASHRAE. Izračunane toplotne izgube se zelo dobro ujemajo s standardnim transmisijskim izračunom. Identificirali smo tudi potencialno mesto kondenzacije in predlagamo dodatno vpihovalno šobo.

Abstract. The paper deals with numerical simulation of steady thermo hydraulic conditions of air heating and ventilating of domestic pool area using Computational Fluid Dynamic. The main motivation is to check ventilation design on eventual condensation. Humidity is simulated using additional transport equation for water vapor mass. The most important part of computation is the boundary condition of evaporated rate of water on pool surface which is determined by using an empirical equation found in ASHRAE standard. Computed heat load is in excellent agreement with standard calculation. A potential condensation spot is identified. An additional inlet nozzle is proposed.

1 Uvod

V prispevku smo prikazali uporabo računske dinamike tekočin za modeliranje tokovnih razmer v bazenskem prostoru, slika 1. Prostor toplozračno ogrevamo s klimatsko napravo Thermo-Cond 291101 proizvajalca Menerga d.o.o. Naprava ima štiri načine delovanja, med katerimi samodejno izbira najbolj gospodarnega glede na zunanjo temperaturo in vlažnost v primerjavi

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

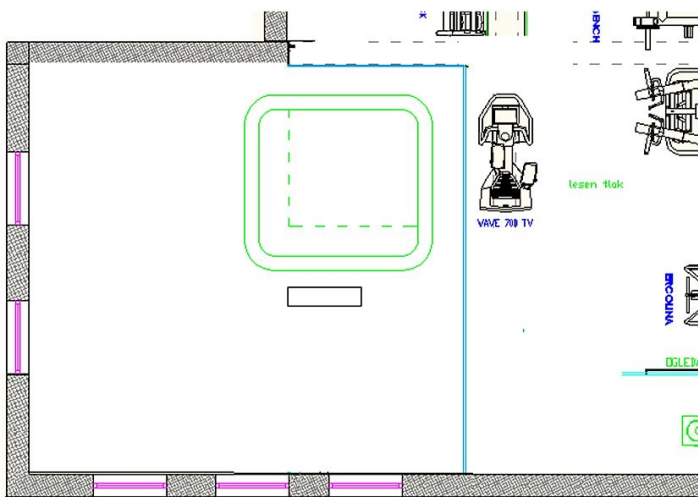
² Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

z zelenimi vrednostmi. Več o napravi lahko preberete v [1]. Simuliramo zimske razmere, kjer so temperaturni gradienti največji. Prav tako je tudi največja možnost kondenzacije na hladnih površinah.

V literaturi najdemo mnogo primerov simulacij tokovnih razmer pri ogrevanju, prezračevanju in hlajenju prostorov. Omenimo samo eno kompleksno simulacijo prezračevanja operacijske dvorane vključno z osebjem, [2]. V tem delu je pasivni skalar koncentracija izdihanega CO_2 , ki predstavlja vir bakterij in potencialno okužbo pacienta.

Na temo simulacij prezračevanja in ogrevanja prostorov smo v našem laboratoriju za Prenosne pojave v trdninah in tekočinah izdelali več diplomskih nalog. Posebnost pričujočega diplomskega dela na 1. stopnji bolonjskega študija, [3], je vključitev modeliranja vlažnosti kot pasivni skalar.

Struktura prispevka je sledeča. Po uvodu bomo predstavili vodilne enačbe. V tretjem poglavju bomo opisali geometrijo problema in robne pogoje. Glavna teža prispevka predstavlja četrto poglavje rezultati in diskusija. Na koncu podamo zaključke in smernice za nadaljnjo delo.



Slika 1 : Tlorisni načrt bazenskega prostora, ki je s steklom razmejen s fitnessom.

2 Vodilne enačbe

Laminarni ali turbulentni tokovni režim? V bazenskem prostoru imamo prisilno prezračevanje. Reynoldsovo število na vpihavalnih šobah je reda velikosti 50 000 (1 m/s, 0.1 m), kar nakazuje turbulenco. V našem primeru gre za curke zraka v relativno mirujoči zrak, ki je značilni primer proste turbulence. Ker je vpliv zidu na turbulenco minimalen, smo se odločili za standardni k-epsilon turbulentni model. Rešujemo torej povprečene Navier-Stokesove enačbe in dodatni transportni enačbi za turbulentno kinetično energijo k in disipacijo ϵ [4].

Za modeliranje vlažnosti x , ki je definirana kot razmerje mase vodne pare proti masi suhega zraka, rešujemo dodatno transportno enačbo

$$\frac{\partial x}{\partial t} + \nabla(\vec{v}x) = \nabla(D\nabla x) \quad (1)$$

kjer je D difuzivnost vodne pare in znaša $2e-5 \text{ m}^2/\text{s}$, kar je enaka vrednost kot difuzivnost zraka pri 25°C . Vodilne enačbe rešimo s programskim paketom ANSYS CFX [4].

Relativno vlažnost ϕ izračunamo iz rezultatov kot razmerje med vlažnostjo x in stanjem nasičenosti x_s

$$\phi = \frac{x}{x_s} \quad (2)$$

Stanje nasičenosti je funkcija temperature. Izračunamo jo z izrazom (National Oceanic and Atmospheric Administration, [5])

$$x_s(T) = 6.112 \exp\left(\frac{17.67T}{T + 243.5}\right) \quad (3)$$

3 Geometrija, mreženje in robni pogoji

Tloris bazenskega prostora smo prikazali na sliki 1. Bazenski prostor je v sklopu fitnesa, od katerega ga ločuje steklena stena. Ostale stene mejijo na zunanji zrak, slika 2. Na teh površinah smo predpisali toplotno prehodnost k in temperaturo na drugi strani stene, tabela 1. Za vlažnost na teh površinah predpišemo adiabato.

Tabela 1 : Robni pogoji na posameznih površinah, prehodnostni koeficient k in temperatura okolice T .

	zunanja stena	steklena stena	okna	tla	strop
$k[\text{W}/\text{m}^2\text{K}]$	0.3	2.0	1.1	0.2	0.17
$T[^\circ\text{C}]$	-13	22	-13	2	-13

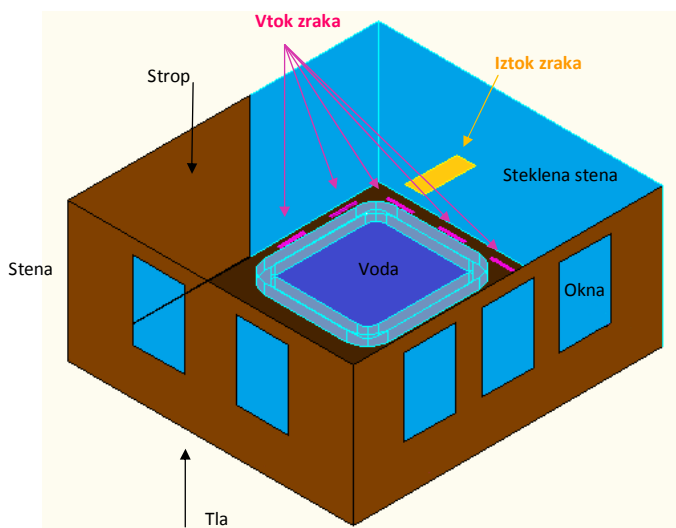
Vpihvalne šobe so nameščene na tleh ob stekleni steni, slika 2. Hitrost zraka smo izračunali iz projektiranega pretoka in znaša 1.1 m/s . Vstopna temperatura je 37°C in 19% vlažnost. Enako temperaturo ima tudi voda v bazenu. Na iztoku smo predpisali povprečni statični tlak 0 Pa .

3.1 Robni pogoj na gladini bazena

Posebni primer predstavlja gladina vode v bazenu in hitrost izhlapevanja. Robni pogoj za vlažnost je trivialna. V mejnem sloju je vlažnost enaka vlažnosti nasičenja pri temperaturi vode 37°C in jo izračunamo z izrazom (3). Hkrati je temperatura vode tudi temperaturni robni pogoj za zrak.

Pri hitrosti izhlapevanja je več možnosti, saj obstaja veliko korelacij. V ameriškem standardu ASHRAE (American Society of Heating, Refrigerating and Air-Conditioning Engineers) smo našli analitično - empirično formulo za hitrost izhlapevanje vode iz bazenov m_{f0} , [6]

$$m_{f0} = C\rho_s(\rho_{vp} - \rho_s)^{1/3}(x_s - x) \quad (4)$$



Slika 2 : Geometrija modela in robni pogoji.

kjer sta ρ_s in x_s in gostota in vlažnost nasičene vodne pare, ρ_{vp} in x sta označeni povprečni vrednosti daleč stran od mejne plasti. V našem izračunu smo povprečno vlažnost predpostavili na 50% relativne vlažnosti pri 30°C. Koeficient C je empirična vrednost in znaša v tem primeru 35. Zasedenost bazena povečuje aktivno površino izhlapevanja zaradi valov in pršenja, kar se upošteva z dodatnim prenosorazmernostnim koeficientom m_f/m_{f0} . Vrednosti tega koeficienta se giblje med 1.3 in 3.3. Z upoštevanjem slednje vrednosti, smo dobili hitrost izhlapevanja $51 \text{ g/m}^2\text{h}$. Omenimo še to, da obstajajo v ASHRAE in DIN standardih različne korelacije, ki vključujejo število kopalcev in hitrost zraka nad vodo. V primerjavi z difuzijskim tokom oziroma Stefanovim tokom [7], je naša izračunana hitrost izhlapevanja 20krat večja, kar je skladno s pričakovanji. Kot zanimivost omenimo še to, da je projektiran vnos vlage kar 100krat večji od predstavljenega empiričnega izračuna. Menimo, da je to neke vrste projektantska varnost. V nadaljnjem izračunu uporabljamo rezultat [6], ki temelji na teoretičnih in eksperimentalnih raziskavah.

4 Rezultati in diskusija

Izračun smo naredili na dveh gostotah mreže. Redka mreža je sestavljena iz 80 000 elementov ter gosta iz 280 000 elementov. Primerjava obeh toplotnih tokov z standardnim transmissijskim izračunom je podana v tabeli 2. Iz tabele je lepo razvidna minimalna sprememba toplotnih tokov po posameznih elementih med redko in gostejšo mrežo (0.02 %). Računski čas na redki mreži je bil 8ur, pri gosti mreži 2 dni. Naslednji pokazatelj natančnosti rezultatov je tudi bilanca toplotnih tokov, ki je izpolnjena na 0.04% in 0.02% za redko in gosto mrežo. Za resnejši izračun bi morali uporabiti še gostejšo mrežo, vendar menimo, da rezultati ne bi bili bistveno drugačni. V tabeli smo podali tudi rezultate transmissijskega izračuna, ki so približno 2% večji.

Vzrok je v različni prestopnosti na notranji steni. Pri numeričnem izračunu je to rezultat modeliranih toplotno-tokovnih razmer ob steni, v našem primeru konkretno rezultat zidnih funkcij turbulentnega modela, medtem ko je pri transmisijem izračunu prestopnost podana vrednost po standardu. Za primerjavo podajamo še moč nameščenega grelnika v klimatski napravi ki je

Tabela 2 : Primerjava toplotnih tokov [W] po posameznih elementih prostora za redko in gosto mrežo ter transmisijem izračunom. Toplotni tok grelca smo izračunali kot razliko entalpij vstopnega in izstopnega zraka.

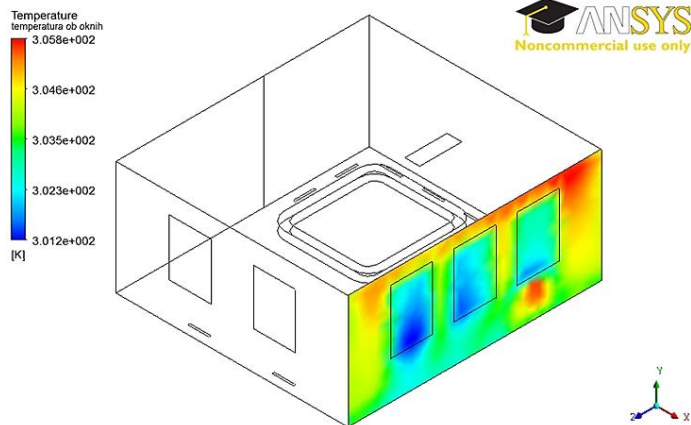
	CFX 80 000 elem	CFX 280 000 elem	Transmisijem iz.
okna	669.54	669.32	675.0
stene	441.03	441.13	445.5
steklene stene	429.57	429.43	432.0
tla	195.54	195.51	198.0
strop	248.51	248.56	252.5
voda	-157.35	-157.61	-
grelec	-1826.07	-1826.02	Σ 2003.0
bilanca	-0.77	-0.32	-
v %	0.04	0.02	-

približno 2x večja od izračunane vrednosti, in sicer 4.4 kW. Prav tako imamo tudi podatek o moči ventilatorja, ki je 0.53 kW. Pri računskem pretoku $1100 \text{ m}^3/\text{s}$ to ustreza tlačnemu padcu 1735 Pa. Numerični izračun tlačnega padca v bazenskem prostoru je 915 Pa. V razliki približno 800 Pa so zajeti še tlačni padci razvoda zraka in same klimatske naprave. In očitno še nekaj rezerve.

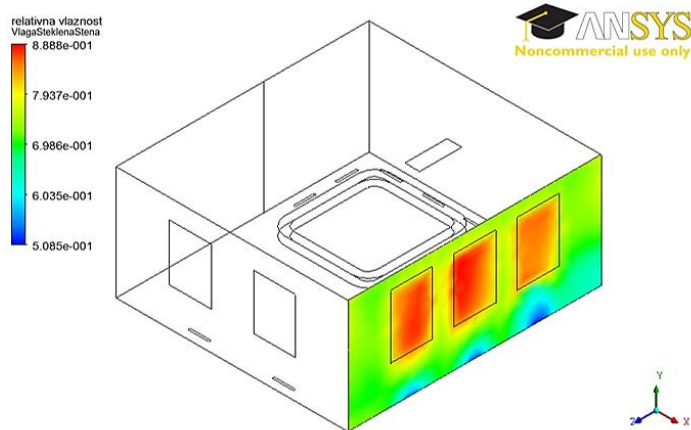
Preidimo k slikovnim rezultatom. Najprej prikažemo toplotne razmere na notranji strani zunanje stene, slika 3. Po pričakovanju je temperatura stekel najnižja, saj imajo okna največjo toplotno prehodnost. Ta temperatura je relativno visoka, 28°C , kar je posledica relativno visoke temperature 37°C vpihovalnikov zraka, ki so nameščeni pod vsakim oknom, slika 6. Pod desnim oknom je področje višje temperature, ki je posledica lokalnih tokovnih razmer vpihovalnika. Tej sliki sovпада naslednja slika 4, kjer so na tej steni prikazane še vrednosti relativne vlažnosti. Maksimalna relativna vlažnost 88% sovпада z nižjimi temperaturami na oknih. Na stenah imamo povprečno relativno vlažnost približno 70 %.

Tokovne razmere smo prikazali samo na sliki 5, kjer so prikazane ploskve konstantne hitrosti 0.2 m/s. Lepo so razvidni curki zraka iz vsake posamezne vpihovalne šobe pod vsakim oknom in vzdolž steklene stene. Ob stekleni steni obstajajo le ti curki, medtem ko ob zunanjih stenah, ob oknih, obstaja področje povečane hitrosti navzdol. Topel zrak se namreč ob hladnih oknih ohladi, postane težji in pospešeno pade proti tlam. Podobno je tudi ob vseh treh zunanjih vogalih. Po pričakovanju je povečano področje hitrosti tudi v bližini sesalne rešetke na stropu.

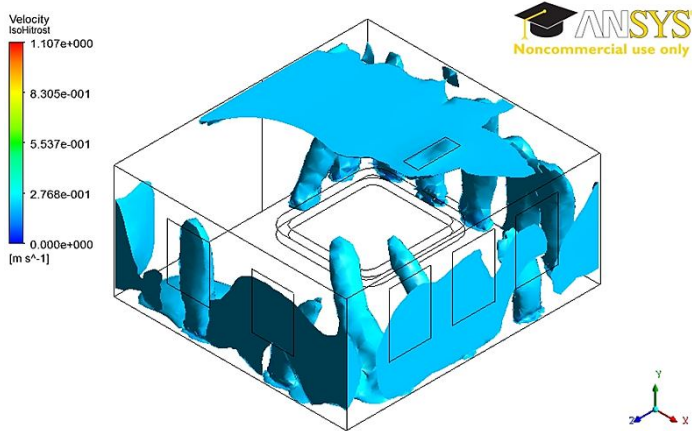
Na sliki 6 smo prikazali še ploskev konstantne relativne vlažnosti 100 %. Le ta se dotika leve gornje zunanje stene kar nakazuje potencialno mesto kondenzacije. Vzrok je očiten. Tam se namreč ne nahaja vpihovalna šoba, sliki 5 in 2. Identifikacija potencialnega mesta kondenzacije je tudi praktično uporaben zaključek in namen pričujočega dela.



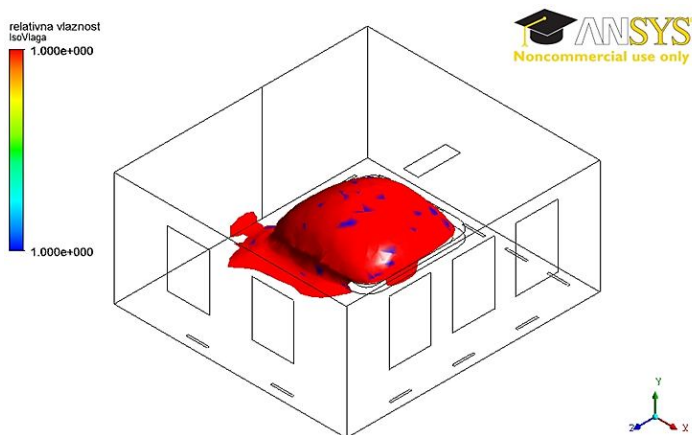
Slika 3 : Temperaturna porazdelitev na notranji steni, ki meji na hladno okolico.



Slika 4 : Porazdelitev relativne vlažnosti na steni iz slike 3. Maksimalna vrednost je na oknih 88%.



Slika 5 : Površina konstantne hitrosti 0.2 m/s (ang. Isosurface).



Slika 6 : Površina konstantne relativne vlažnosti 100% (ang. Isosurface).

5 Zaključki in smernice za nadaljnjo delo

V prispevku smo predstavili numerično simulacijo toplozračnega ogrevanja in prezračevanja bazenskega prostora. Ugotovili smo potencialno območje kondenzacije na zunanji steni in predlagali dodatno iztočno šobo zraka.

Predstavljene numerične rezultate bi bilo dobro preveriti tudi eksperimentalno na obstoječem objektu. Možne nadaljevanje raziskovalnega dela je vključitev kondenzacije, ki bi bil uporaben tudi v drugih primerih.

Literatura

- [1] Menerga d.o.o.: <http://www.menerga.si>, 2011.
- [2] R. Al-Waked, *Effect of ventilation strategies on infection control inside operating theatres*. Eng. App. of Computational Fluid Mechanics, 4., 1–16 2010.
- [3] M. Čontala, *Simulacija prezračevanja bazena z računsko dinamiko tekočin*. Diplomsko delo, univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo, 2010.
- [4] ANSYS CFX 12.6, <http://www.ansys.com/>, 2011.
- [5] http://en.wikipedia.org/wiki/Dew_point, 2011.
- [6] M. Shah, *Analytical formulas for calculating water evaporation from pools*, ASHRAE Transactions, 2008.
- [7] L. Škerget, *Prenos snovi*, Učbenik v tisku, Univerza v Mariboru, Fakulteta za Strojništvo, 2011.



Ekspperimentalna modalna analiza majhnih in lahkih struktur

D. Rovšček¹, J. Slavič¹ in M. Boltežar¹

Experimental modal analysis of small and light structures

Povzetek. V prispevku je predstavljen postopek merjenja modalnih parametrov zelo lahkega merjenja. Postopek poteka z vzbujanjem preko namensko izdelanega zaznavala z vgrajenim piezoelektričnim merilnikom deformacij, ki omogoča analizo omenjene strukture pri prostem vpetju z minimalno dodano maso. Pravilnost delovanja zaznavala je bila potrjena tudi eksperimentalno na vzorcu manjših dimenzij in mase. Rezultati eksperimenta so bili primerjani z rezultati numeričnega modela. Z metodo, uporabljeno v tej študiji, lahko natančno izmerimo modalne lastnosti v širokem frekvenčnem področju (do 20 kHz).

Abstract. A procedure for experimental modal analysis of small and light structures is presented in this study. This procedure involves measurement of the excitation force, which was performed by a custom made sensor with implemented piezo-strain gauge that enables analysis of the aforementioned structures with free-free support and small mass loading. Correct functioning of the sensor was confirmed experimentally on a sample with small dimensions and mass. Results of the experiment were compared with the results of numerical model. The procedure used in this study enables accurate measurement of modal parameters in wide frequency range (up to 20 kHz).

1 Uvod

Ekspperimentalna modalna analiza (EMA) je postopek za določanje modalnih parametrov (lastnih frekvenc, lastnih oblik in dušenja) strukture, ki je podrobno opisan že v številnih publikacijah [1, 2, 4, 6, 7]. Kljub temu, da je EMA preverjen in uveljavljen postopek, se pri njenem izvajanju pojavijo problemi, če skušamo analizirati relativno majhne in lahke strukture ($m < 50$ g). Razlog se skriva v tem, da pri takih strukturah z običajnimi merilnimi instrumenti (silomer, pospeškomer) dodamo maso na strukturo in s tem spremenimo njene modalne karakteristike, kot navajajo [5, 8] in drugi.

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

Za EMA potrebujemo najprej frekvenčne prenosne funkcije (FPF) v različnih točkah na strukturi. Za določitev FPF pa potrebujemo meritev vzbujevalne sile in odziva (pomika, hitrosti ali pospeška) strukture. Merjenje odziva brez dodane mase enostavno izvedemo z brezkontaktnimi merilniki, od katerih se najpogosteje uporablja laserski merilnik hitrosti, ki deluje na osnovi Dopplerjevega efekta [5, 8, 9, 10]. Težave pa se pojavijo pri meritvi vzbujevalne sile.

Če želimo pri merjenju vzbujevalne sile izničiti vpliv dodane mase na strukturo, se lahko pri večjih strukturah uporablja vzbujanje z udarnim kladivom s silomerom [3]. Vendar je pri majhnih strukturah moč udarca kladiiva prevelika in zato merjenec doseže relativno velike pomike, kar otežuje merjenje odziva in nas napeljuje k uporabi togega vpetja. Za EMA in za primerjavo z numeričnim modelom pa želimo imeti rezultate meritev pri prostem (ang. free-free) vpetju. Hkrati je s kladivom težko točno zadeti želeno točko vzbujanja, še posebej pri majhnih vzorcih. Pri večjih strukturah se to običajno doseže z vzbujanjem s stresalnikom in prenosom sile preko silomera na obravnavani vzorec [2, 4, 7]. Vendar masa silomera preveč vpliva na modalne lastnosti merjenca, da bi lahko na tak način merili tudi majhne in lahke strukture. Potrebovali bi torej drugačno metodo, s katero bi lahko merili prosto vpete majhne in lahke strukture.

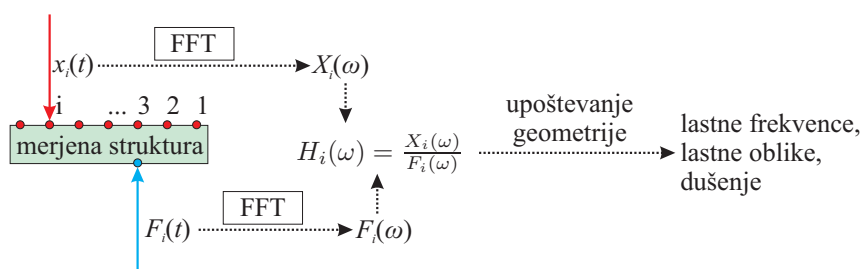
V prispevkih nekaterih avtorjev [5, 8, 9, 10] je mogoče zaslediti predvsem metode za EMA na zelo majhnih (mikro) strukturah, ki so togo vpete na večjo podporno strukturo. Pri takem načinu merjenja se lahko s stresalnikom vzbuja neka (večja) temeljna struktura, na katero je togo pritrjena testirana struktura [8], nato pa je potrebno upoštevati vpliv vpetja na rezultate. Druga možnost pa je, da merjeno strukturo togo vpnemo na enem mestu in brezkontaktno vzbujamo v neki drugi točki, kar lahko izvedemo: z elektromagnetnim aktuatorjem, ki vzbuja majhen feromagnet na merjeni strukturi [10], z interferenco ultrazvočnih valov [5], z visokotlačnimi udari [9] itd. Pri tem načinu je prav tako potrebno upoštevati vpliv vpetja na rezultate.

Metoda, ki je obravnavana v tem prispevku, pa, za razliko od prej omenjenih, omogoča merjenje majhnih in lahkih struktur pri prostem vpetju. Deluje tako, da s stresalnikom vzbujamo preko merilnika vzbujevalne sile, torej na klasičen način s kontaktom. Pri tem pa poskrbimo, da je med senzorjem vzbujevalne sile in obravnavano strukturo čim manjša masa in da je prenos momenta od stresalnika na merjenec čim manjši. Te lastnosti nam omogočajo, da izvedemo EMA na prosto vpeti strukturi in zato rezultate lažje primerjamo z numeričnim modelom. Ker pa je masa merilnika, ki vpliva na strukturo, minimalna, torej lahko določimo modalne lastnosti tudi pri majhnih in lahkih strukturah. Hkrati pa zaradi karakteristik merilnika lahko merimo pri relativno visokih frekvencah (do 20 kHz), kar je zelo ugodno pri majhnih strukturah, saj imajo običajno le-te prve lastne frekvence višje, pri nekaj kHz (glej [8]).

Vzporedno z meritvami je bil izdelan tudi numerični model, ki je bil kasneje izboljššan in validiran na podlagi rezultatov eksperimenta. Validiran numerični model služi za potrditev rezultatov meritev, hkrati pa lahko z njim ocenimo, kako bi se spremenili modalni parametri obravnavane strukture, če bi spreminjali njene lastnosti (dimenzije, materialne karakteristike, vpetje itd.), kar je pomembno tudi s konstruktorskega vidika.

2 Teoretično ozadje

EMA je postopek za določanje modalnih parametrov obravnavane strukture, ki je podrobneje opisan v [2, 4, 7]. Potek EMA je predstavljen na sliki 1. Merjeno strukturo vzbujamo z znano silo $F_i(t)$ in sočasno merimo odziv strukture $x_i(t)$ na i -tem merilnem mestu. Za določitev FPF za vsa merilna mesta moramo ali spreminjati mesto vzbujanja po vseh točkah in stalno meriti odziv na istem mestu ali pa spreminjati mesto merjenja odziva po vseh točkah in vzbujati stalno na istem mestu. V tej študiji je bila izbrana druga možnost, saj je bilo težje premikati mesto vzbujanja kot pa mesto merjenja odziva. S hitro Fourierjevo transformacijo (ang. Fast Fourier Transformation - FFT) izmerjena časovna signala $F_i(t)$ in $x_i(t)$ pretvorimo v frekvenčna signala $F_i(\omega)$ in $x_i(\omega)$. Njun količnik predstavlja i -to FPF $H_i(\omega)$.



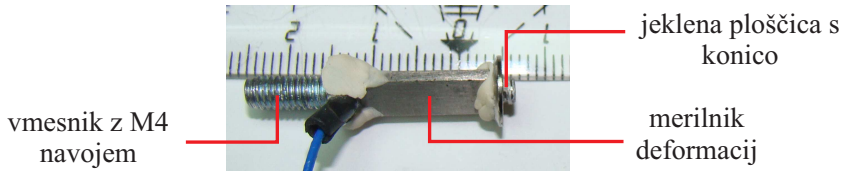
Slika 1 : Skica poteka EMA.

Lastne frekvence in lastne oblike določimo tako, da najprej na podlagi geometrijskih karakteristik obravnavane strukture (lokacije merilnih točk) izdelamo model nosilca. Lastne frekvence so na mestih vrhov prenosnih funkcij, torej jih lahko enostavno razberemo iz izmerjenih FPF. Pomiki posameznih merilnih točk pri teh frekvencah so določeni iz amplitude in faznega zamika izmerjenih FPF. Če te pomike vstavimo v model, dobimo pripadajoče izmerjene lastne oblike, ki so prikazane na sliki 7. Če nas zanima tudi dušenje, ga določimo iz amplitude izmerjenih FPF.

3 Uporaba piezoelektričnega merilnika deformacij za EMA

Za določitev modalnih lastnosti obravnavane strukture je bilo torej potrebno izvesti meritve FPF. Pri tem sta bila sočasno merjena vzbujevalna sila in odziv (hitrost) strukture. Pri večjih strukturah poteka vzbujanje preko merilnika sile, odziv pa merimo s pospeškomerom, a ta dva merilna instrumenta pri majhnih strukturah s svojo maso preveč vplivata na rezultate analize. Zato smo odziv spremljali z laserskim merilnikom hitrosti Polytec PDV-100, s čimer nismo dodali nobene mase obravnavani strukturi. Vprašanje pa je bilo, kako primerno izvesti vzbujanje. Želeli smo določiti vzbujevalno silo tudi pri visokih frekvencah in meriti le lastnosti obravnavane strukture s čim manj zunanjimi vplivi. S tem namenom je bilo izdelano posebno zaznavalo, s katerim smo merili silo, ki je bila dovedena od stresalnika na strukturo. To zaznavalo je prikazano na sliki 2 in podrobneje opisano v podpoglavju 3.1. Za vzbujanje je poskrbel stresalnik LDS V101, ki ima sicer lastno frekvenco pri 12 kHz, torej v frekvenčnem območju merjenja, vendar nas to pri

meritvah ni oviralo, saj smo spremljali vzbujevalno silo in s tem izločili vpliv lastne dinamike stresalnika.



Slika 2 : Zaznavalo za določanje vzbujevalne sile na osnovi izmerjenih deformacij.

3.1 Meritev vzbujevalne sile

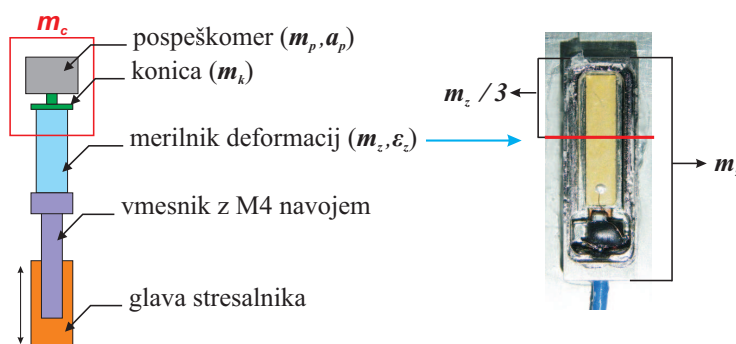
Zaznavalo, ki je bilo razvito v okviru te študije, temelji na piezoelektričnem merilniku deformacij (PCB 740B02), ki ima relativno majhno maso (0,5 g) in visoko lastno frekvenco (100 kHz). Običajno se tak tip merilnika prilepi na obravnavano strukturo in nato merimo deformacijo te strukture. V okviru te analize pa je bila merjena deformacija samega merilnika, preko katerega se prenaša vzbujevalna sila. Tak način meritve je bil izbran, ker je tako dodana masa na strukturo manjša in rezultati natančnejši. Na merilnik deformacij sta bila z dvokomponentnim cementnim lepilom pritrjena vmesnik z M4 navojem, ki služi za vpetje zaznavala na glavo stresalnika, in jeklena ploščica s konico, ki je v kontaktu z obravnavano strukturo. Uporabljeno cementno lepilo je v strjenem stanju zelo togo in lahko prenaša relativno visoke frekvence, kar nam omogoča verodostojne meritve v izbranem frekvenčnem področju (do 20 kHz). Oblika konice je takšna, da dovoljuje le minimalen prenos momenta na vzorec (in nazaj na zaznavalo), saj je prenešeni moment moteč dejavnik pri merjenju sile.

Meritev sile je potekala posredno, kajti uporabljeno zaznavalo je v prvi vrsti namenjeno merjenju deformacije in ne sile. Zato je bilo potrebno najprej določiti, v kakšnem medsebojnem odnosu sta deformacija zaznavala in vzbujevalna sila, da bi lahko izvajali željene meritve. Če predpostavimo, da se preko zaznavala prenaša le vzdolžna sila (tlačna ali natezna), potem sta specifična deformacija zaznavala ϵ_z in vzbujevalna sila F_v premo sorazmerni. Razmerje med njima definira koeficient pretvorbe k^* , kot prikazuje enačba (1).

$$k^* = \frac{F_v}{\epsilon_z} \quad (1)$$

Če torej izmerimo specifično deformacijo ϵ_z pri znani obremenitvi F_v , lahko iz tega izračunamo koeficient pretvorbe merilnika deformacij k^* , ki nam izmerjeno specifično deformacijo neposredno pretvori v silo. Znano obremenitev dobimo tako, da najprej na izdelano zaznavalo pritrdimo pospeškomer z znano maso m_p , kot prikazuje slika 3.

V tem primeru sočasno merimo specifično deformacijo zaznavala ϵ_z in pospešek pospeškomera a_p . Ker pa poznamo celotno nihajočo maso m_c in njen pospešek a_p , je znana tudi vzbuje-



Slika 3 : Določanje togostnega koeficienta merilnika raztezka k^* z upoštevanjem celotne nihajoče mase m_c .

valna sila ($F_v = m_c \cdot a_p$). Pri tem je potrebno poudariti, da je celotna nihajoča masa ($m_c = m_p + m_k + \frac{m_z}{3}$) sestavljena iz mase pospeškometera m_p , mase konice m_k (0,23 g) in dela mase merilnika deformacij m_z (0,5 g), ki ga glede na konstrukcijske značilnosti merilnika ocenimo na $\frac{m_z}{3}$. Poglejmo torej celoten postopek določanja k^* z znano vzbujevalno silo F_v , ki ga opisuje enačba (2).

$$F_v = m_c \cdot a_p = \left(m_p + m_k + \frac{m_z}{3}\right) \cdot a_p \quad \Rightarrow \quad k^* = \frac{\left(m_p + m_k + \frac{m_z}{3}\right) \cdot a_p}{\varepsilon_z} \quad (2)$$

Izračunani k^* predstavlja koeficient za pretvorbo izmerjene deformacije v silo vzbujanja. Bil je preverjen pri treh različnih masah pospeškometerov. Masa, ki je med meritvami FPF dodana strukturi, je torej enaka $m_k + \frac{m_z}{3}$ in znaša 0,4 g. Običajna masa, ki jo komercialno dostopni merilniki sile dodajo merjeni strukturi, je večja od 1 g, pri čemer je njihova meja uporabnega frekvenčnega območja pogosto nižje od 20 kHz.

4 Uporaba zaznavala pri eksperimentu in primerjava z numeričnim modelom

4.1 Vzorec

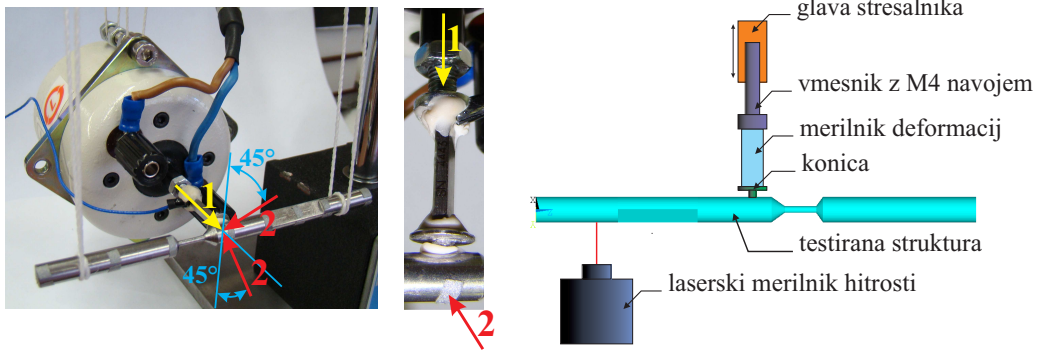
Kot vzorec je bila uporabljena jeklena palica okroglega prereza s premerom 6 mm, dolžino 108 mm in maso 21 g (glej sliko 4). Na palici so bili izdelani zožitev na premer 1.4 mm (za znižanje lastne frekvence v osni smeri) in 2 utora (za osno nesimetričnost). Geometrija je bila določena tako, da ima vzorec v območju merjenja (0 - 20 kHz) eno torzijsko, eno osno in več upogibnih lastnih oblik.



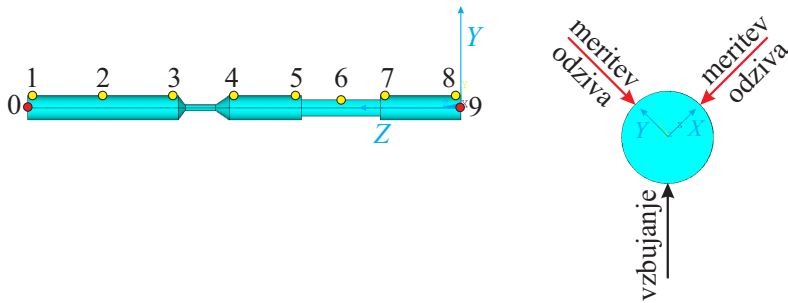
Slika 4 : Vzorec, na katerem je bila izvedena EMA.

4.2 Meritve FPF

Simulacijo prostega vpetja smo izvedli tako, da je bil vzorec obešen na dve vrvi, kot prikazuje slika 5. Vzbujanje je potekalo v horizontalni smeri, in sicer s pomočjo stresalnika, ki je bil prav tako obešen na dve vrvi. Meritev odziva je potekala v osmih točkah (1 - 8) v X in Y smeri ter v dveh točkah (0, 9) v Z smeri. Merilna mesta so prikazana na sliki 6.



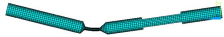


















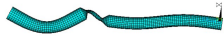


Slika 5 : Merjenje FPF: puščica z oznako 1 označuje smer vzbujanja, puščice z oznako 2 pa smeri merjenja odziva strukture. Na srednji sliki je povečava kontaktnega področja, na desni pa skica meritve.



Slika 6 : Merilna mesta za merjenje v smeri Y osi (levo) ter smeri vzbujanja in merjenja odziva (desno).

4.3 Primerjava rezultatov meritev in numeričnega modela

Numerični model je bil z uporabo metode končnih elementov izdelan s programskim paketom Ansys na podlagi znane geometrije in materiala vzorca. Pri tem so bili uporabljeni 20-vozliščni kvadrasti končni elementi tipa SOLID186 z materialnimi karakteristikami jekla (gostota, modul elastičnosti, Poissonov količnik). Na modelu je bila izvedena modalna analiza, katere rezultati so lastne oblike in lastne frekvence. Dušenje lahko uvedemo v model na podlagi rezultatov meritev. Na sliki 7 lahko vidimo primerjavo lastnih oblik modela in izmerjenih lastnih oblik. Pri obeh so navedene tudi vrednosti lastnih frekvenc, ki se v večini primerov ujemajo na 2 %, v vseh primerih pa vsaj na 4 % natančno. Torzijske lastne oblike (3. lastne oblike) ne moremo rekonstruirati iz izvedenih meritev. Je pa bila izmerjena njej pripadajoča lastna frekvenca (2279 Hz). Vse ostale upogibne in osne lastne oblike ter njim pripadajoče frekvence so bile izmerjene po postopku, opisanem v poglavju 3. Natančnost izmerjenih lastnih oblik bi lahko povečali z večanjem števila merilnih točk.

Numerični model			Meritve	
1	383 Hz			379 Hz
2	384 Hz			383 Hz
3	2268 Hz		/	2279 Hz
4	3551 Hz			3574 Hz
5	3938 Hz			4039 Hz
6	6902 Hz			6622 Hz
7	8415 Hz			8203 Hz
8	12390 Hz			12521 Hz
9	16979 Hz			16951 Hz
10	17679 Hz			18138 Hz
11	18269 Hz			18602 Hz
12	20196 Hz		> 20000 Hz	

Slika 7 : Primerjava rezultatov numeričnega modela in meritev.

5 Zaključek

Predstavljen je bil nov postopek za izvajanje eksperimentalne modalne analize na izdelkih relativno majhnih dimenzij in mas. Vzbujanje pri tem poteka preko kontakta, meritev vzbujevalne sile pa je izvedena z uporabo piezoelektričnega merilnika deformacij, ki je bil vgrajen v namensko izdelano zaznavalo sile. Tak način spremljanja vzbujevalne sile omogoča meritve v širokem frekvenčnem področju (do 20 kHz), kar je ugodno za majhne strukture, ki imajo običajno višje lastne frekvence. Hkrati pa je masa merilnih instrumentov, ki jo dodamo obravnavani strukturi, minimalna, torej ne vpliva bistveno na njene modalne lastnosti.

Izdelano zaznavalo sile je bilo uporabljeno za izvedbo EMA na vzorcu majhnih dimenzij, s čimer je bila tudi potrjena pravilnost delovanja senzorja. Rezultati EMA so bili primerjani z rezultati numeričnega modela. Ujemanje med modelom in meritvami je dobro, saj pri obeh razberemo zelo podobne lastne oblike, hkrati pa se lastne frekvence razlikujejo minimalno (največ za 4 %).

Literatura

- [1] P. Avitabile. Experimental modal analysis: A simple non-mathematical presentation. *Sound and Vibration Magazine*, 35(1):20–31, 2001.
- [2] D. J. Ewins. *Modal Testing: Theory and Practice*. Research Studies Press, John Wiley and Sons, 1984.
- [3] J. A. Forrest. Experimental modal analysis of three small-scale vibration isolator models. *Journal of Sound and Vibration*, 289(1-2):382–412, 2006.
- [4] J. He and Z.-F. Fu. *Modal Analysis*. Butterworth-Heinemann, 2001.
- [5] T. M. Huber, M. Fatemi, R. Kinnick, and J. Greenleaf. Noncontact modal analysis of a pipe organ reed using airborne ultrasound stimulated vibrometry. *Journal of Acoustical Society of America*, 119(4):2476–2482, 2006.
- [6] N. M. M. Maia and D. J. Ewins. A new approach for the modal identification of lightly damped structures. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 3(2):173–193, 1989.
- [7] N. M. M. Maia and J. M. M. Silva. *Theoretical and Experimental Modal Analysis*. Research Studies Press, John Wiley and Sons, 1997.
- [8] O. B. Ozdoganlar, B. D. Hansche, and T. Carne. Experimental modal analysis for microelectromechanical systems. *Experimental Mechanics*, 45(6):498–506, 2005.
- [9] S. Vanlanduit, F. Daerden, and P. Guillaume. Experimental modal testing using pressurized air excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 299(1-2):83–98, 2007.
- [10] C. J. Wilson and D. B. Bogy. An experimental modal analysis technique for miniature structures. *Journal of Vibration and Acoustics - Transactions of the ASME*, 118(1):1–9, 1996.



Vpliv zračnosti v ležaju na horizontalno togost valjčnih ležajev in dinamične karakteristike rotorjev

*Zdenko Savšek*¹

Influence of bearing clearance on rolling bearing horizontal stiffness and consequently on dynamic characteristics of rotors

Povzetek. Prikazan je preračun kritičnih obratov večjega ventilatorja. Poseben poudarek je na točni analizi togosti kotalnega ležaja v vertikalni in horizontalni smeri, saj je vpliv na končni rezultat lahko zelo pomemben.

Abstract. This paper contains some calculations of the critical rotation velocity of a large fan. A precise analysis of the rolling bearing vertical and horizontal stiffness is emphasized, due to the very important influence of these phenomena on the final result.

1 Uvod

V letu 2005 je bil v Termoelektrarni Trbovlje zaključen projekt odžveplevanja dimnih plinov. Za pretok vročih dimnih plinov skozi čistilno napravo in dimnik sta bila vgrajena dva ventilatorja (slika 1) poljskega proizvajalca Fawent. Pri prvih zagonih je zaradi povečanih vibracij prihajalo do avtomatske prisilne zaustavitve ventilatorjev in posledično celotne elektrarne. Podjetje Kalmer je bilo vključeno v dodatne meritve in balansiranja [11], ki pa so istočasno pokazala tudi zelo nemiren značaj rotorja. Avtor članka je bil zato vključen kot zunanji svetovalec za analizo in odpravo nastalega problema.

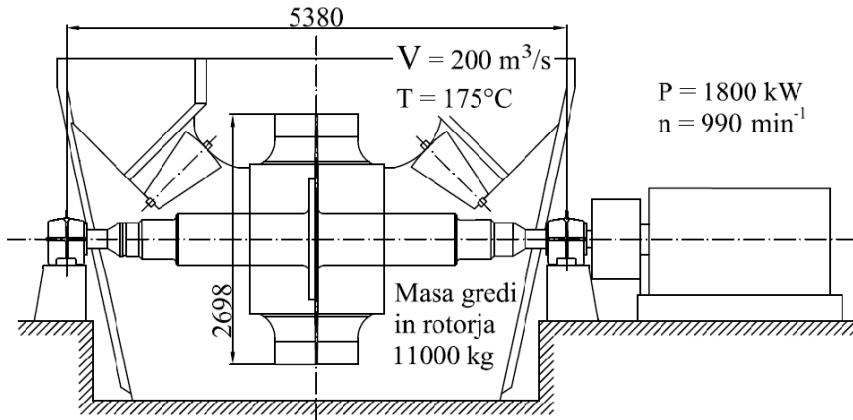
Moč ventilatorja je 1,8 MW pri frekvenci vrtenja $n_d=990/\text{min}$. Fawent je izračunal kritično hitrost $n_{cr} = 1430/\text{min}$ in s tem dovolj velik odmik od resonančnih problemov. Preračun je temeljil na upogibni teoriji nosilcev in je bil avtorju članka podan samo na vpogled. Razvidno je bilo, da niso bili upoštevani sicer majhni, a pomembni detajli, ki lahko bistveno zmanjšajo kritično hitrost.

Zanemarjen je bil vpliv strižnih deformacij gredi, togosti ležajnih podstavkov in ohišja ležaja, kot tudi togosti v samem ležaju pri kontaktih valjčkov s tekalno površino. Ti vplivi niso nič novega, in so zajeti tudi v literaturi [1-8]. Naša analiza pa opozori predvsem na

¹ PIRNAR & SAVŠEK, Inženirski biro, Trbovlje

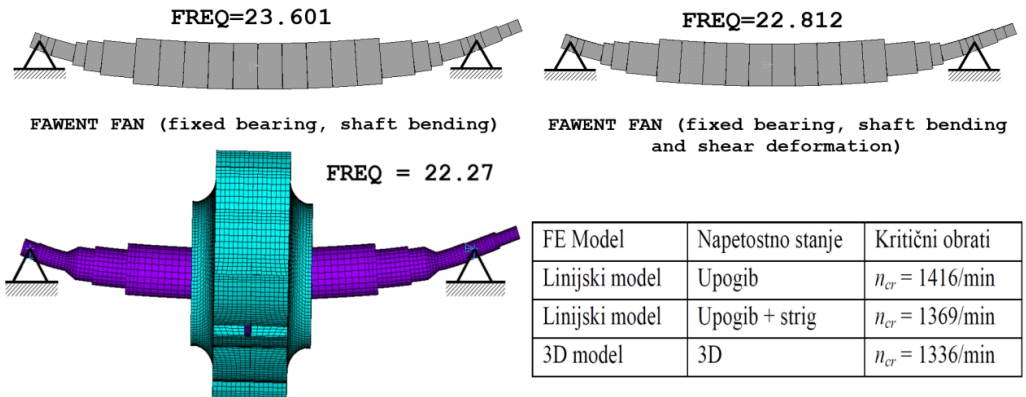
odločilen prispevek zračnosti v kotalnem ležaju k zmanjšanju horizontalne oziroma prečne togosti, česar pa avtor v njemu znani literaturi še ni zasledil. Kljub povsem praktični naravi problema zato članek vsebuje tudi nova teoretična spoznanja v poglavju dinamike rotorjev.

Analiza in iz nje izhajajoče korekcije so bile dobra osnova za to, da vse od leta 2005 do sedaj ventilatorji v Termoelektrarni Trbovlje uspešno in varno obratujejo.



Slika 1: Ventilator dimnih plinov z glavnimi podatki

2 Izračun z upoštevanjem podajnosti gredi na fiksnih podporah



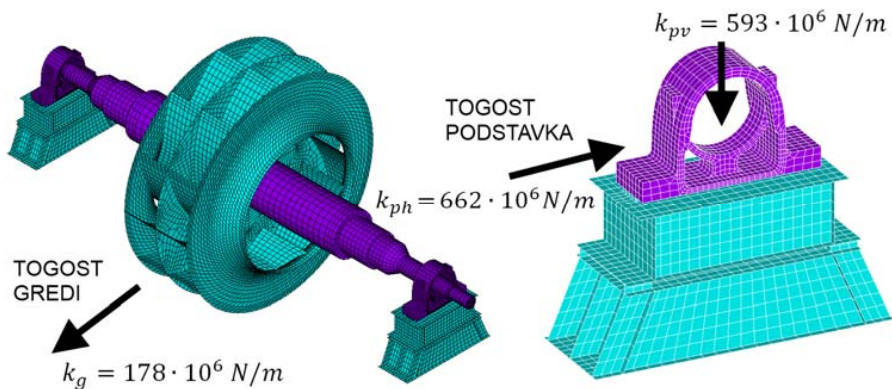
Slika 2: Kritični obrati gredi na fiksnih podporah

Na sliki 2 so rezultati na osnovi različnih računskih modelov skupaj z opisom predpostavk. Predpostavljena je absolutna togost ležajnih mest. Rezultat na osnovi linijskega modela in upogibnega napetostnega stanja je skoraj identičen s proizvajalčevo vrednostjo. Vendar je zanemarljiv vpliv strižnih deformacij tudi zelo pomemben. Linijski (upogib + strig) in 3D model pokažeta podoben rezultat: slednji je točnejši in ima manjšo vrednost, zaradi

natančnejšega upoštevanja deformacijske energije v prehodih gredi, kjer se premer skokovito menja.

3 Analiza podajnosti posameznih konstrukcijskih elementov

Togost podstavka in ležajnega ohišja tudi zniža proizvajalčevo pričakovano kritično hitrost. Na sliki 3 je model z dodanim podstavkom, ohišjem ležaja kot tudi posebni kontaktni elementi, ki naj bi popisali dogajanje v samem ležaju na nivoju kotalečih se elementov. Iz primerjave togosti gredi in podstavka sledi, da slednjih ne smemo zanemariti.



Slika 3: Popolni 3D FE model celotnega ventilatorja z detajlem podstavka z ohišjem

4 Togost sodčkastega ležaja FAG 22236 E1.C3



Slika 4: Nihalni sodčkasti ležaj s podatki

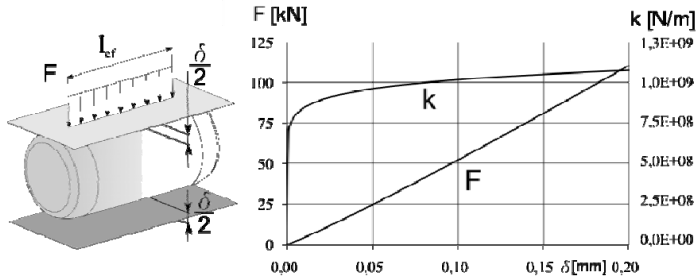
Na vsaki strani gredi vgrajen ležaj je obremenjen z vertikalno silo $F_V = 55 \text{ kN}$ kot posledica lastne teže rotorja in gredi. Uporabljena je izvedba C3 s povečano radialno zračnostjo, saj je zaradi pretoka vročih plinov konstruktor predpostavil, da bo temperatura povečala premer gredi oziroma notranji obroč ležaja. Podatki so na sliki 4.

Literatura [2, 3, 6, 8] navaja vrsto uporabnih enačb za oceno radialne togosti v smeri delujoče sile na ležaj. Nikjer pa ni zaslediti podatkov za togost v pravokotni smeri glede na

trenutno delujočo silo. V primeru večjih zračnosti v ležaju je ta lahko mnogo manjša in odločilno vpliva na končno dinamiko rotorja.

Nosilna karakteristika valjčka je na sliki 5. Izračunana je po enačbi posedka (vir [1]):

$$\delta = 8,1 \cdot 10^{-5} (F^{0.925} / l_{ef}^{0.85}) \quad (1)$$



Slika 5: Nosilna karakteristika valjčka

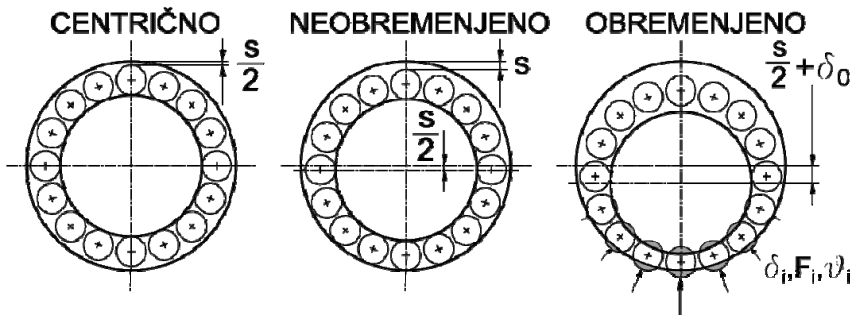
Posedki posameznih valjčkov so odvisni od položajnega kota ϑ in zračnosti s v ležaju. Nosilnost ležaja F_V je enaka vsoti nosilnosti posameznih valjčkov. Slika 6 pojasnjuje pomen spodnjih enačb.

$$\delta(\vartheta) = \delta_0 \left[\cos \vartheta - \frac{s}{2\delta_0} (1 - \cos \vartheta) \right] \quad (2)$$

$$F_V = \sum F_i(\delta) \cos \vartheta_i \quad (3)$$

Prikazana vsota teče samo po kotu kontakta

$$\cos \vartheta_c = (s/2\delta_0) / (1 + s/2\delta_0) \quad (4)$$



Slika 6: Razmere v ležaju

Togost ležaja k_V v vertikalni smeri dobimo z odvodom enačbe (3) po posedku δ_0 , togost k_H v horizontalni smeri pa sledi po analogiji z nihalom dolžine $e = s/2 + \delta_0$.

$$k_H = F_V / \left(\frac{s}{2} + \delta_0 \right) \quad (5)$$

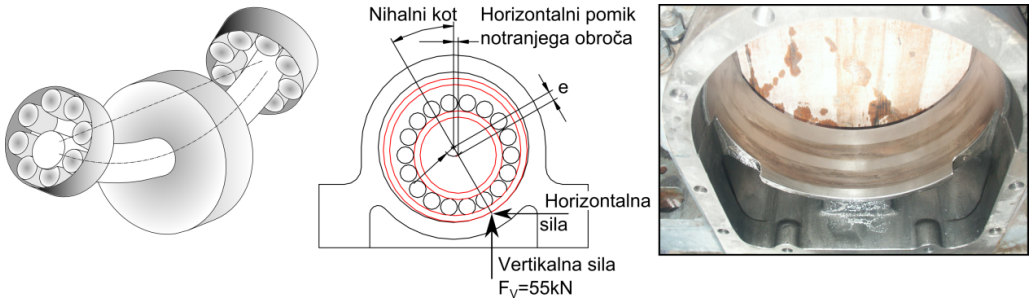
Izdelovalna zračnost ležaja je v intervalu 180 do 240 μm . Po vgradnji ležaja na gred in ležajno ohišje z določenimi tolerancami, kot tudi z določeno predpostavko o termičnih raztezkih in deformacijah ohišja zaradi obremenitve, smo ugotovili, da bo cel ležajni sklop

obratoval v intervalu zračnosti s . Koristna je tudi definicija nihalnega radija oziroma ležajne ekscentričnosti e .

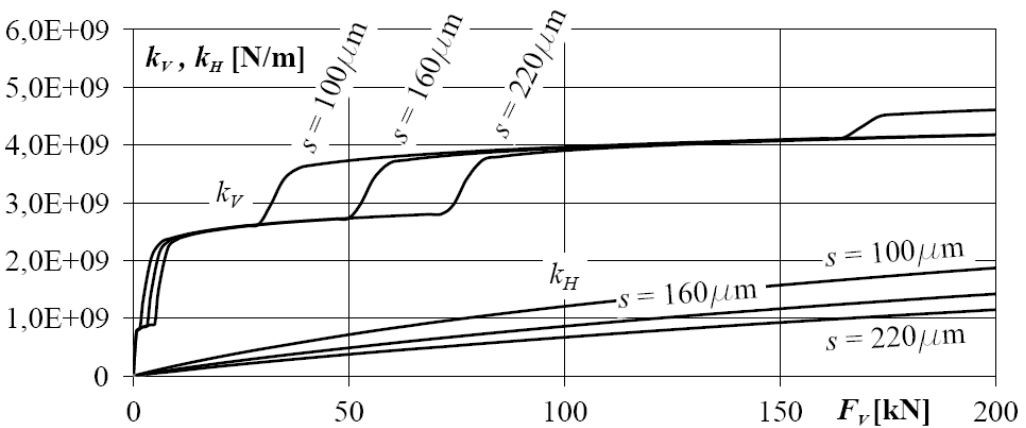
$$s \in [100, 220] \text{ } \mu\text{m} \quad \text{ozioroma najverjetnejša vrednost} \quad s = 160 \text{ } \mu\text{m} \quad (6)$$

$$e = \frac{s}{2} + \delta_0 \quad (7)$$

Razmere v ležajnem sklopu prikazuje slika 7, na sliki 8 pa sta prikazani vertikalna in horizontalna togost, kot sledita iz prikazanih enačb.

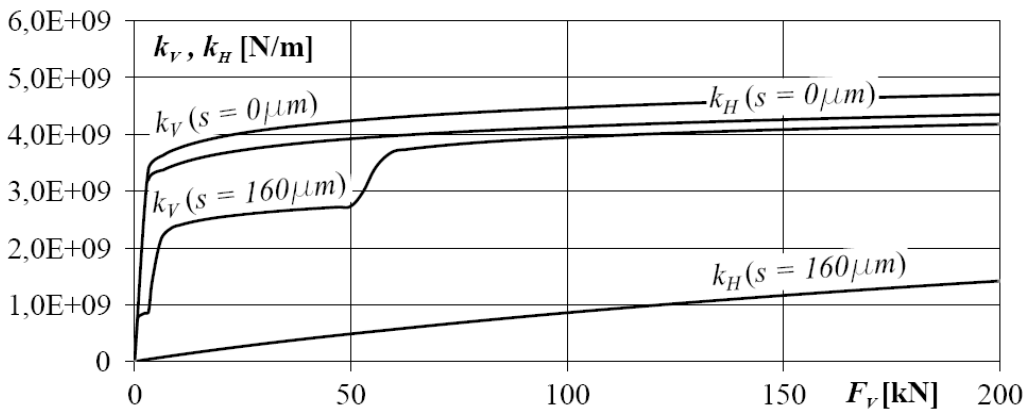


Slika 7: Dogažanje v ležaju – slika prikazuje odtise zaradi nihanja zunanjega obroča v ohišju



Slika 8: Togost ležaja za možne obratovalne zračnosti s

Skočni značaj vertikalne togosti je posledica naraščanja števila valjčkov v kontaktu z naraščajočo obremenitvijo. Opazna je neprimerno manjša horizontalna togost ležaja, kar ima lahko pomemben vpliv na dinamiko rotorja. Ta vpliv je v večini primerov zanemarljiv, saj se teoretične in eksperimentalne raziskave togosti največkrat izvajajo na manjših, bolj preciznih (brez zračnosti) ležajih [2,3], ki izkazujejo enako togost v obeh smereh. Tudi naš model potrdi, da sta obe togosti skoraj identični, če predpostavimo ležaj z nično zračnostjo (slika 9). Istočasno je na sliki prikazan naš ležaj z (v obratovanju) opazno zračnostjo. Razlika, predvsem v horizontalni togosti, je dramatična. Ravno ta padec horizontalne togosti ima odločilen vpliv na obnašanje ventilatorja, kot sledi v nadaljevanju.



Slika 9: Togost ležaja z nično in realno zračnostjo

5 Kritične hitrosti gredi ob upoštevanju togosti vseh elementov

Model s slike 3 je bil na mestu ležaja dopolnjen s kontaktnimi elementi na podlagi rezultatov predhodnega poglavja. Povzetek vseh togosti je podan v tabeli 1, končni izračun kritičnih hitrosti za različne zračnosti v ležajih pa v tabeli 2. Iz tabele 1 je razvidno, da za točen preračun ne smemo zanemariti podajnosti podstavkov, še bolj pomembno pa je upoštevanje horizontalne podajnosti samega ležaja (efekt nihala), saj je ta »mehkoba« lahko tudi četrtnina vrednosti podajnosti gredi.

Tabela 1: Povzetek togosti vseh elementov

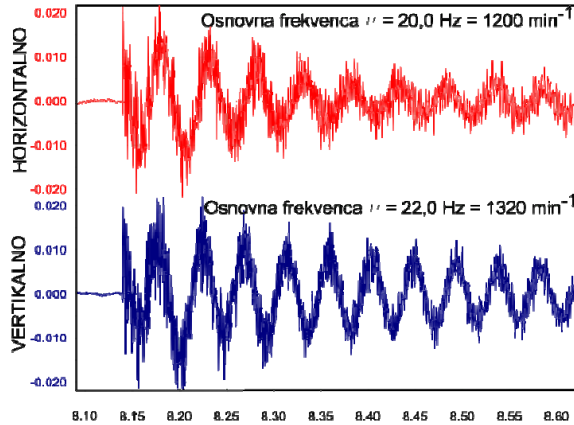
Smer	Element	Togost N/m	Podajnost m/N	Razmerje
Vertikalno	Gred	178×10^6	$5,62 \times 10^{-9}$	100%
	2× podstavek	1186×10^6	$0,84 \times 10^{-9}$	15%
	2× ležaj	6500×10^6	$0,15 \times 10^{-9}$	3%
Horizontalno	Gred	178×10^6	$5,62 \times 10^{-9}$	100%
	2× podstavek	1324×10^6	$0,76 \times 10^{-9}$	13%
	2× ležaj (min. zračnost)	1460×10^6	$0,68 \times 10^{-9}$	12%
	2× ležaj (verj. zračnost)	920×10^6	$1,09 \times 10^{-9}$	19%
	2× ležaj (max. zračnost)	660×10^6	$1,52 \times 10^{-9}$	27%

Tabela 2: Kritični obrati ventilatorja vleka v Termoelektrarni Trbovlje

Smer nihanja	Zračnost v ležajih		
	Minimalna	Verjetna	Maksimalna
Vertikalno	1206 / min	1206 / min	1206 / min
Horizontalno	1182 / min	1145 / min	1109 / min

6 Meritev impulznega odziva gredi ventilatorja

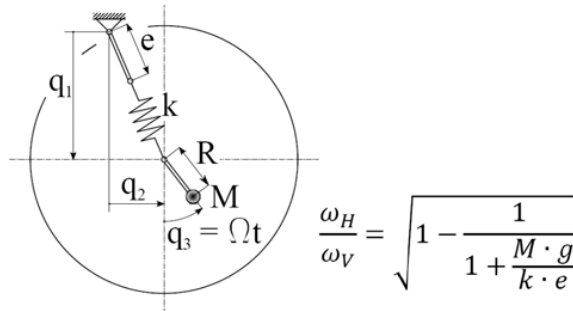
Z impulznim udarcem večje mase po gredi mirujočega ventilatorja (hladna gred) smo dobili posnetek na sliki 10, kjer je razviden horizontalni odziv gredi s frekvenco 1200/min, vertikalni pa 1320/min. Med obratovanjem, ko je gred ogreta na 150°C, je modul elastičnosti manjši. Korekcija nam da horizontalni odziv na 1160/min, vertikalni pa na 1280/min. Nekaj več kot v tabeli 2, vendar meritve še vedno potrjujejo naše teoretične izpeljave.



Slika 10: Impulzni odziv gredi ventilatorja

7 Preprost analitični model

Današnji čas je čas računalnikov. Pa vendar inženir v praksi svoje mojstrstvo lahko dokazuje (in mora dokazovati!) tudi na drug način – z obvladovanjem problema po občutku in logiki. Zato je uporabljen enostaven mehanski model, ki nam lahko pokaže razmerje med vertikalno in horizontalno frekvenco v primeru ležajev z zračnostjo. Izpeljava ni podana – ker tudi ni težka, končna enačba pa je podana na praktičnem formatu »pomnilnega lističa« na sliki 11. Za začetek ga lahko uporabimo na našem primeru iz tabele 2. Preverjeno deluje (seveda z ustrezno domišljijo o efektivnih masah M in togostih k).



Slika 11: Pomnilni listič za inženirja v praksi

8 Zaključek

Dinamični faktor odziva pri centrifugalnem vzburjanju za nedušeno nihanje

$$V = 1/(1 - \eta^2) \quad (8)$$

je v primeru (Fawent-ovega) razmerja kritičnih hitrosti $\eta=990/1430=0,69$ enak $V=1,91$. Na osnovi izračunov in meritev pa imamo za kritično hitrost $n_{cr} = 1150/\text{min}$ in dobimo razmerje kritičnih hitrosti $\eta=990/1150=0,86$, kar povzroči skok dinamičnega faktorja na $V=3,84$. Zaradi tega porasta je ventilator neprimerno bolj občutljiv na neuravnoteženost, ki nastaja s postopnim nalepljanjem pepela, ki je (kljub filtrom) še vedno prisoten v dimnih plinih. Problem je v praksi rešen s pogostejšim čiščenjem oblog, sočasno pa sta na zalogi dva ležaja z manjšo zračnostjo, s katerima bi v primernem trenutku lahko zamenjali obstoječa, če bi bilo to potrebno.

Literatura

- [1] J. Brändlein, P. Eschmann, L. Hasbargen, K. Weigand, *Ball and roller bearings. Theory, design and application*. John Wiley & Sons, 1995
- [2] M. Breuer, *Theoretische und experimentelle bestimmung der wälzlagersteifigkeit*. VDI Verlag, 1994
- [3] R. Tiwari, N. S. Vyas, *Estimation of non-linear stiffness parameters of rolling element bearings from random response of rotor-bearing system*. J. of Sound and Vibration 187 (2),229-239, 1995
- [4] T. A. Harris, M. N. Kotzalas, *Rolling bearing analysis. Essential concepts of bearing technology, Fifth Edition*, Taylor & Francis Group, 2007
- [5] T. A. Harris, M. N. Kotzalas, *Rolling bearing analysis. Advanced concepts of bearing technology, Fifth Edition*, Taylor & Francis Group, 2007
- [6] E. Krämer, *Dynamics of rotors and foundations*. Springer-Verlag, 1993
- [7] A. Muszynska, *Rotordynamics*. Taylor & Francis Group, 2005.
- [8] H. Dresig, *Scwingungen mechanischer Antriebssysteme. Modellbildung, Berechnung, Analyse, Synthese*. Springer-Verlag, 2001
- [9] L. Meirovitch, *Methods of analytical dynamics*. McGraw-Hill Book Company, 1970
- [10] FAG, *FAG Wälzlager. Kugellager, Rollenlager, Gehäuse, Zubehör*. Katalog WL 41 520/3 DB, Ausgabe 1999.
- [11] Kalmer d.o.o., *Poročilo o meritvah vibracij, centriranju in balansiranju ventilatorjev vleka v TE Trbovlje, junija 2005*. Trbovlje 2005, 2005



Statična stabilnost nelinearno elastičnega Eulerjevega nosilca

M. Sitar¹, M. Brojan¹ in F. Kosel¹

Static stability of nonlinearly elastic Euler's column

Povzetek. V tem delu obravnavamo stabilnostne razmere nelinearno elastičnega nosilca. Pri takšnem nosilcu se lahko, v odvisnosti od različnih vrednosti snovnih parametrov, pojavijo stabilnostna stanja, ki so sicer značilna za povsem drugačne konstrukcijske sisteme. Z uvedbo pojma končne motnje pokažemo, da se lahko nosilec ukloni tudi pri sili, ki je manjša od bifurkacijske. S predlaganim pristopom lahko tudi v inženirski praksi analiziramo stabilnostne razmere enoosnih konstrukcijskih elementov, ki so izdelani iz gume ali poljubnega gradiva, ki sledi splošnemu Ludwickovemu modelu.

Abstract. It is illustrated in this paper that a nonlinearly elastic column, depending upon the values of different material parameters involved, exhibits several stability characteristics and types of buckling which are generally observed separately in distinctively different structural systems. By introducing finite disturbances it is shown that the column may buckle way before the bifurcation buckling load is reached. The proposed approach can be useful in engineering practice since it can be utilized to study the stability of uniaxial structural elements made from rubber or any other material which obeys the modified Ludwick's constitutive model.

1 Uvod

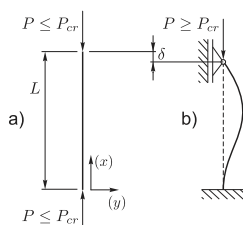
V primeru vitkih konstrukcijskih elementov je potrebno, poleg običajnega preračuna, t.j. kontrole napetosti, deformacij ali premikov, preveriti ali morda napetostno stanje ni takšno, da bi že majhna motnja povzročila hitro naraščanje deformacij – uklon. Najbolj znan stabilnostni problem je uklon vitkega ravnega nosilca, ki je obremenjen z osno tlačno silo. V območju, kjer je ta sila manjša od neke mejne oziroma kritične sile, se nosilec skrči, prečni premiki pa so enaki nič. Če nosilec v tem stanju z neko dodatno obremenitvijo, npr. s prečno silo, še ukrivimo, nato pa to silo odstranimo, se nosilec vrne nazaj v ravno lego. Za tak nosilec pravimo, da je v stabilnem ravnovesnem stanju. Območje, kjer je tlačna sila večja od kritične, imenujemo nadkritično območje. V tem območju je sicer možno, da so prečni premiki enaki nič, vendar je to stanje nestabilno, saj lahko poljubno majhna motnja v prečni smeri povzroči, da se nosilec sunkovito ukrivi, t.j. zavzame novo, natančno določeno stabilno ravnovesno lego. V tem primeru pravimo, da se je konstrukcijski element uklonil.

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

V literaturi pogosto zaznamo, da je (v splošnem) podkritično območje označeno kot stabilno, nadkritično območje pa nestabilno, če je nosilec še vedno raven in stabilno, če se je nosilec ukrivil. V tem prispevku bomo pokazali, da nadkritično območje ni stabilno (v celoti) že v primeru Hookeovega gradiva. Za izbran model nelinearno elastičnega gradiva bomo pokazali tudi, da se lahko v odvisnosti od različnih vrednosti snovnih parametrov, pojavijo stabilnostna stanja, ki so sicer značilna za povsem drugačne konstrukcijske sisteme.

2 Definicija problema

Predpostavimo vitek, začetno raven elastični nosilec dolžine L , s pravokotnim ter vzdolž svoje osi konstantnim prečnim prerezom širine b in višine h . Nosilec, ki je na enem koncu konzolno vpet in na drugem koncu pomično členkasto podprt, je obremenjen s tlačno osno silo P , slika 1. V primeru, da ta sila preseže določeno vrednost P_{cr} , lahko nosilec bočno ukloni, kot prikazuje slika 1(b).



Slika 1: Nedeformirano in deformirano stanje nosilca.

Pri tem je z δ ,

$$\delta = L - \int_0^L \cos \vartheta(s) ds, \quad (1)$$

označen vertikalni pomik nosilca.

Predpostavimo, da je gradivo nosilca nestisljivo, homogeno, izotropno in nelinearno elastično. Nelinearno napetostno-deformacijsko zvezo bomo popisali s posplošenim Ludwickovim konstitutivnim modelom, ki ga matematično predstavlja naslednja enačba

$$\sigma(\varepsilon) = \text{sign}(\varepsilon) E \left[(|\varepsilon| + \varepsilon_0)^{1/k} - \varepsilon_0^{1/k} \right], \quad (2)$$

E , k in ε_0 pa predstavljajo snovne konstante [1, 2].

3 Osnovne enačbe

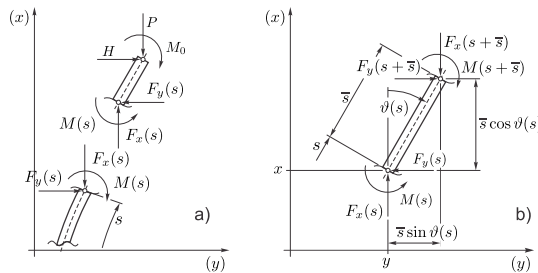
Kartezični koordinatni sistem xy izberemo tako, da x -os sovpada z nedeformirano osjo nosilca, koordinatno izhodišče pa postavimo na mesto konzolnega vpetja. S s , $0 \leq s \leq L$, označimo krivočrtno koordinato, ki sledi osi nosilca, s $\vartheta(s)$ pa kot med tangento na nevtralno os nosilca in pozitivno smerjo koordinatne osi x pri koordinati s , slika 2.

S pomočjo statičnega ravnovesja na segmentu nosilca, slika 2(a), kjer H in M_0 predstavljata reakcijsko silo in moment na mestu členkasto pomične podpore, in statičnega ravnovesja na infinitezimalnem elementu, slika 2(b), ter skupaj z geometrijskimi zvezami

$$x'(s) = \cos \vartheta(s) \text{ in } y'(s) = \sin \vartheta(s), \quad (3)$$

lahko zapišemo

$$M'(s) + P \sin \vartheta(s) + H \cos \vartheta(s) = 0. \quad (4)$$



Slika 2: Razmere na izrezanem delu in infinitezimalni element deformiranega nosilca.

Naprej s pomočjo zveze za notranji upogibni moment $M = -\int_A \sigma y dA$, konstitutivnega modela zapisanega z enačbo (2) in upoštevanjem zveze med specifično deformacijo in radijem ukrivljenosti nosilca $\varepsilon = -y\rho^{-1}$ izpeljemo zvezo

$$M(s) = 2bkE\rho(s)^2 \left[\frac{(1+k)h \mp 2k\varepsilon_0\rho(s)}{2(1+k)(1+2k)\rho(s)} \left(\frac{\pm h}{2\rho(s)} + \varepsilon_0 \right)^{1+1/k} \pm \frac{k\varepsilon_0^{2+1/k}}{(1+k)(1+2k)} \mp \frac{h^2\varepsilon_0^{1/k}}{8k\rho(s)^2} \right], \quad (5)$$

kjer $\rho(s)$ predstavlja radij ukrivljenosti pri koordinati s , [2]. Zgornji simbol pri \pm , \mp predstavlja predznak v primeru pozitivne ukrivljenosti nosilca in obratno. Z upoštevanjem geometrijske povezave $\rho^{-1}(s) = \vartheta'(s)$ ter z vstavljanjem enačbe (5) v enačbo (4) končno sledi vodilna diferencialna enačba problema,

$$\left[\pm 4A \pm \left(\varepsilon_0 \pm \frac{1}{2} h \vartheta'(s) \right)^{1/k} \left(-4A\varepsilon_0^{-1/k} \pm 2B\vartheta'(s) + \frac{1}{2} C(\vartheta'(s))^2 \right) \right] \frac{\vartheta''(s)}{(\vartheta'(s))^3} + P \sin \vartheta(s) + H \cos \vartheta(s) = 0 \quad (6)$$

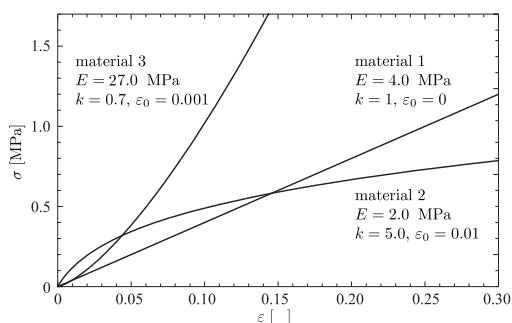
kjer ' označuje odvod po spremenljivki s ter A , B in C predstavljajo naslednje količine

$$A = -\frac{bEk^2\varepsilon_0^{2+1/k}}{(1+k)(1+2k)}, \quad B = -\frac{bEk h \varepsilon_0}{(1+k)(1+2k)}, \quad C = \frac{bEh^2}{1+2k}. \quad (7)$$

Vodilno diferencialno enačbo, skupaj z robnima pogojsma $\mathcal{G}(0)=0$ in $\mathcal{G}'(L)=0$, rešujemo numerično s pomočjo integracijske metode Runge-Kutta-Fehlberg. Robni problem prevedemo s pomočjo parametra $\mu = \mathcal{G}'(0)$ na začetni problem. Upoštevamo še dodatni pogoj $y(L)=0$, saj je pri fiksni vrednosti sile P sila H neznan parameter. Ker tako v numeričnem postopku nastopata dve neznanki, t.j. μ in H , si pri njunem izračunu pomagamo še z Newtonovo metodo za reševanje sistema nelinearnih enačb. Naprej s pomočjo zvez (3) in robnih pogojev $x(0)=0$, $y(0)=0$ določimo še premično stanje nosilca.

4 Rezultati

Na podlagi zgoraj predstavljenega matematičnega modela je v tem delu prikazana analiza stabilnosti obravnavanega nosilca za tri vrste materialov, katerih vrednosti posameznih parametrov so prikazane na spodnjem diagramu.



Slika 3: $\sigma - \varepsilon$ diagram in osnovni parametri.

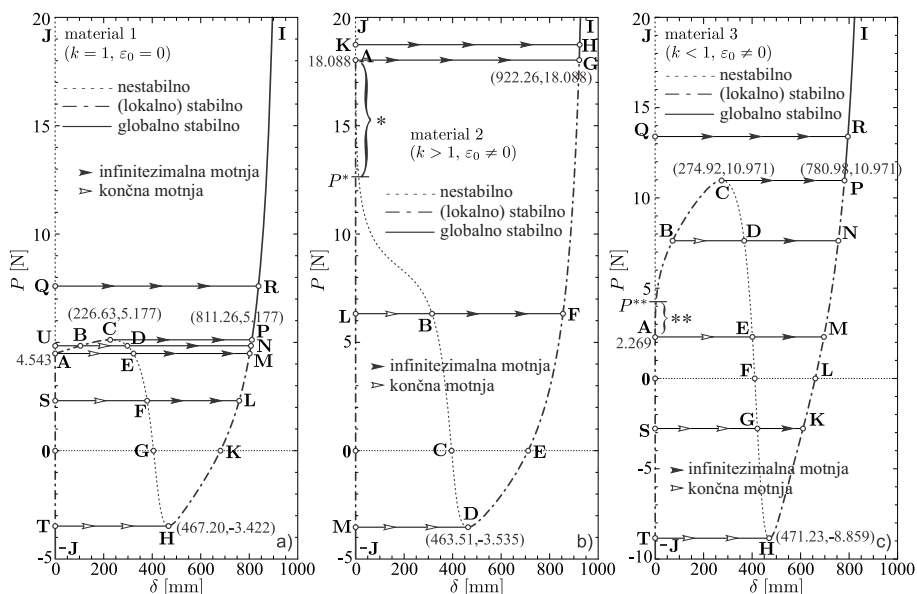
Geometrijske značilnosti nosilca so: dolžina $L = 500,0$ mm, širina $b = 50,0$ mm in višina $h = 15,0$ mm.

Analiza stabilnosti konstrukcij ima pomembno vlogo, kadar lahko nosilec pri določeni vrednosti obremenitve zavzame več ravnovesnih stanj (za katere niti ni nujno, da so si infinitezimalno blizu). Pri tem je lahko nosilec, ki je v (kvazi)statičnem ravnovesju,

- v nevtralnem stanju, če pri tem nastopi natanko eno ravnovesno stanje,
- v nestabilnem stanju, če že *infinitezimalna* motnja povzroči, da nosilec zavzame drugo, natančno določeno ravnovesno stanje,
- v (lokalno) stabilnem stanju, če lahko *končna* motnja povzroči, da nosilec zavzame drugo ravnovesno stanje,
- v globalno stabilnem stanju, če tudi ob končni motnji nosilec ne zavzame drugega ravnovesnega stanja.

Pri tem motnja predstavlja poljubno prehodno obremenitev ali premik, ki pa je, kot smo že omenili, infinitezimalne ali pa končne velikosti.

Grafi stabilnostnih krivulj, ki predstavljajo zvezo med silo P in vertikalnim pomikom δ , enačba (1), slika 1, so za posamezne materiale prikazani na sliki 4.



Slika 4: Karakteristične P - δ krivulje.

Nekaj o stabilnostnih razmerah obravnavanega problema lahko najdemo v literaturi [3, 4], kjer je upoštevan linearno elastični material ($k=1$ in $\varepsilon_0=0$). V tem primeru, slika 4(a), P narašča z δ na segmentih **ABC** in **HKLMNPRI** ter pada na segmentu **CDEFGH**. V splošnem velja, da je v segmentih, kjer je $dP/d\delta > 0$, sistem (lokalno) stabilen in v segmentih, kjer je $dP/d\delta < 0$ nestabilen, [5]. Bifurkacijska sila $P_{bif} = P_A = 4,543$ N nastopi v točki **A** in deli krivuljo ravnovesnih stanj na nestabilno vejo **(A)UQJ** (trivialna rešitev) in na vejo, ki je lokalno stabilna na **AB(C)** in **(H)KLMN(P)** segmentu, nestabilna na **CDEFGH** in globalno stabilna na segmentu **PRI**. Pri tem oznaka **(A)** pomeni, da je točka **A** izključena iz segmenta **AUQJ**. Točki **C** in **H** sta lokalni maksimum in minimum P - δ krivulje. Potrebno je poudariti, da je podkritično območje **-JT0SA** v nevtralnem stanju le za $P < P_T = -3,422$ N, t.j. na **-J(T)** segmentu. Zato je analiza (globalne) stabilnosti pomembna (glede na prisotnost končnih motenj) celo za natezne sile P . Na segmentu **(T)0SA**, t.j. za P , $P_T < P \leq P_A$, je nosilec lokalno stabilen, saj za P_S obstajajo tri ravnovesna stanja, dve lokalno stabilni **S** in **L** ter eno nestabilno **F**. To pomeni, da lahko dovolj velika končna motnja povzroči, da se bo nosilec uklonil iz stanja **S** v stanje **L**. Pri sili P_T najdemo dve ravnovesni stanji, in sicer eno globalno stabilno v točki **T** in eno nestabilno v točki **H**. Opazimo lahko, da nastopijo štiri ravnovesna stanja za P , $P_A < P < P_C$, in tri ravnovesna stanja za $P = P_C$. Ker je ravnovesno stanje v točki **U** nestabilno, lahko že infinitezimalna motnja povzroči, da bo nosilec preskočil v lokalno stabilno stanje **B**. Naprej lahko ob dovolj veliki končni motnji preskoči v lokalno stanje v točki **N** oziroma, če sila P

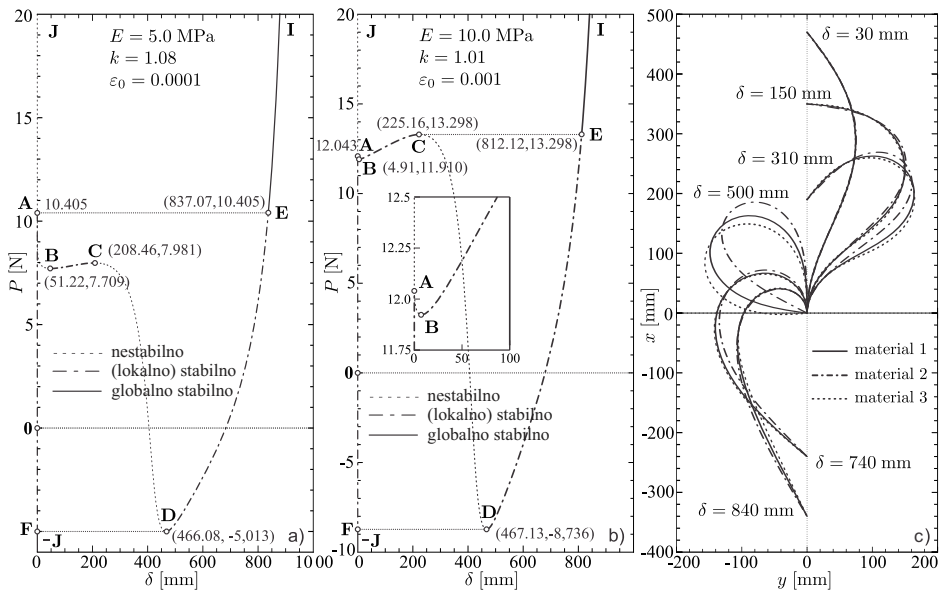
(kvazistatično) naraste (samo infinitezimalno) nad limitno silo P_C , preskoči v globalno stabilno ravnovesno stanje v točki **P** (preskok sistema). Za P , $P > P_C$ obstajata samo dve rešitvi, in sicer ena nestabilna na **(A)UQJ** veji in ena globalno stabilna na **PRI** veji. Pri tem bo nosilec ob infinitezimalni motnji preskočil iz **Q** v **R**. Opazimo še, da imata stanji **G** in **K** ničelne vrednosti za silo P , kar pomeni, da je za vzpostavitev statičnega ravnovesja dovolj le horizontalna reakcijska sila H .

Poti obremenjevanja-razbremenjevanja se razlikujejo, kar pomeni, da obstajajo histerezne zanke. Na primer, če sila P narašča kvazistatično iz **0**, ostaja nosilec raven dokler ni dosežena bifurkacijska točka **A**, nato se deformira skozi stanja **ABC**. Ker je **C** limitna točka, naslednje povečevanje sile P povzroči preskok nosilca v stanje **P**, ki nato sledi stanjem na veji **PRI**. Pot obremenjevanja je tako **0SABCPRI**. Pot razbremenjevanja pa opazujemo, ko sila kvazistatično pada iz **I**. Najprej sledi veji **IRPNMLKH** ter v točki **H** preskoči v stanje **T**, kjer je nosilec raven in obremenjen z natezno silo. Še več histereznih zank najdemo, če upoštevamo prisotnost končnih motenj, npr. pot obremenjevanja **0SLMNPRI** in pot razbremenjevanja **IRPNBAS0**, če pri obremenjevanju v točki **S** in pri razbremenjevanju v točki **N** nastopi končna motnja.

Pomembnejši pa so rezultati analize za nelinearno elastično gradivo. Za primer materiala 2 ($k > 1$ in $\varepsilon_0 \neq 0$) na sliki 4(b) opazimo, da sila P pada z δ na segmentu **ABCD** ter narašča na **DEFGHI**. Točka **D** je lokalni minimum P - δ krivulje. Bifurkacijska sila $P_{bif} = P_A = 18,088 \text{ N}$ v točki **A** deli krivuljo ravnovesnih stanj na nestabilno vejo **AKJ** (trivialna rešitev) in na vejo, ki je nestabilna na **ABCD** segmentu, lokalno stabilna na **(D)EF(G)** in globalno stabilna na **GHI** segmentu. Opazimo lahko, da je podkritično območje **-JM0LA** v nevtralnem stanju samo za P , $P < P_M = -3,535 \text{ N}$, t.j. na segmentu **-J(M)**. Na segmentu **(M)0L(A)**, t.j. za P , $P_M < P < P_A$, je nosilec lokalno stabilen. Pri sili P_M imamo dve ravnovesni stanji, t.j. eno globalno stabilno v točki **M** in eno nestabilno v točki **D**. Tri ravnovesna stanja nastopijo pri P_L , in sicer dve lokalno stabilni stanji (točki **L** in **F**) in eno nestabilno v **B**. Zamislimo si raven nosilec v ravnovesnem stanju **L**. Ob dovolj veliki končni motnji bo nosilec prešel iz **L** v lokalno stabilno stanje **F**. Tukaj je potrebno omeniti, da je z^* označen del krivulje izbran tako, da že majhna (ne infinitezimalna) motnja povzroči izgubo stabilnosti nosilca, t.j. preskok iz trivialne konfiguracije (raven nosilec) v uklonjeno na veji **DEFG**. V praksi bi to pomenilo, da bi se nosilec ob prisotnosti končnih motenj uklonil mnogo prej, preden bi bila dosežena bifurkacijska sila $P_{bif} = P_A$. Za P , $P \geq P_A$, pa imamo dve rešitvi, in sicer eno nestabilno (raven nosilec) na **AKJ** veji ter eno globalno stabilno (uklonjen nosilec) na veji **GHI**. Pri tem bo nosilec ob infinitezimalni motnji preskočil iz stanja **K** v stanje **H**.

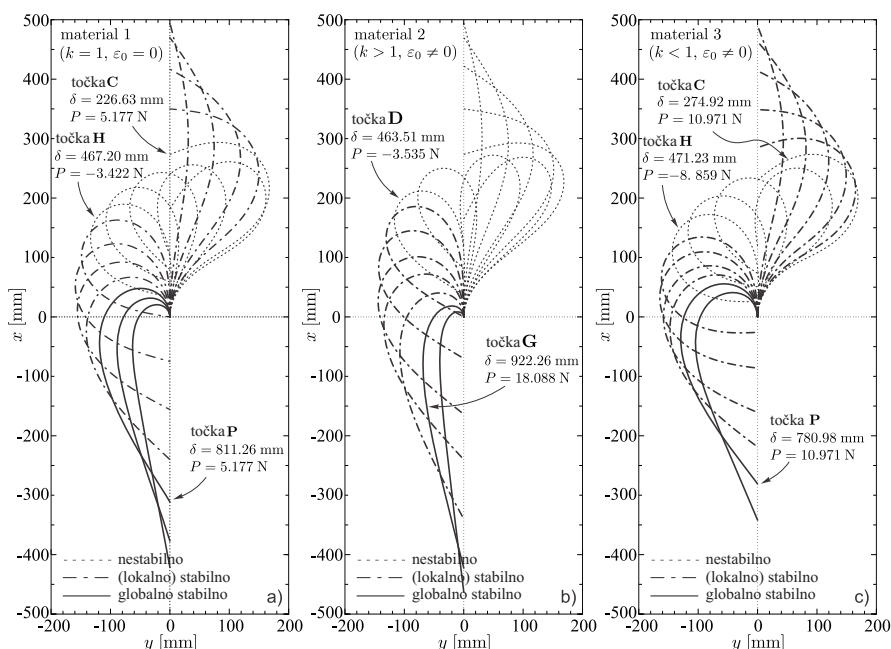
Tudi v tem primeru se poti obremenjevanja in razbremenjevanja razlikujejo. Namreč pri obremenjevanju nosilec ostaja raven (če ni prisotna končna motnja), dokler ni dosežena bifurkacijska točka **A**. Pri tem ob infinitezimalni motnji preskoči v stanje **G** ter sledi stanjem na veji **GHI**. Pot razbremenjevanja pa poteka skozi stanja **IHG FED**, kjer nato ob infinitezimalnem zmanjšanju sile P nosilec preskoči v stanje **M**. Enako kot v linearnem primeru tudi tu ob prisotnosti končnih motenj najdemo še več histereznih zank.

Stabilnostne razmere, kjer obravnavamo material 3 ($k < 1$ in $\varepsilon_0 \neq 0$), glej sliko 4(c), pa so podobne razmeram kot v primeru linearno elastičnega materiala, le da tu v začetnem delu nadkritičnega območja, bolj podrobno z ** označenem delu karakteristične krivulje, opazimo, da majhno povečanje sile P povzroči manjšo spremembo deformacije δ . To pomeni, da se na tem območju pojavi izguba stabilnosti, vendar brez silovitih preskokov med ravnovesnima stanjema (iz čiste osne deformacije v bočni uklon). Pri tem je bifurkacijska sila $P_{bif} = P_A = 2,269 \text{ N}$, ampak tako kot je prikazano na sliki 4(c), do sile P^{**} praktično ni bočne deformacije.



Slika 5: Dodatni P - δ krivulji (a,b) in primerjava deformacijskih stanj (c).

Ob primerjavi karakterističnih krivulj za material 1 in 2, slika 4, lahko sklepamo, da obstaja vsaj še ena dodatna karakteristično drugačna P - δ krivulja. Tako za drug material 2 najdemo dodatno P - δ krivuljo z lokalnim maksimumom. Netrivialna rešitev tako sestoji iz dveh nestabilnih segmentov **AB** in **CD**, dveh lokalno stabilnih segmentov **(B)(C)** in **(D)(E)** ter iz globalno stabilnega segmenta **EI**, slika 5(a) in 5(b). Glavna razlika med grafoma je ta, da je spodnja meja segmenta globalne stabilnosti v drugem primeru višja kot bifurkacijska sila. Omenimo lahko, da v tem primeru nastopi tudi do pet ravnovesnih stanj za dano silo P , $P_B < P < P_C$ na sliki 5(a) oziroma $P_B < P < P_A$ na sliki 5(b). Slika 5(c) prikazuje vpliv snovnih parametrov na prečna stanja nosilca, stabilna in nestabilna prečna stanja za vse tri vrste materialov pa so prikazana na sliki 6.



Slika 6: Stabilna in nestabilna premična stanja.

5 Zaključek

V prispevku so obravnavane stabilnostne razmere in premična stanja vitkega enoosnega konstrukcijskega elementa, ki je izdelan iz naravne gume oziroma poljubnega gradiva, ki sledi posplošenemu Ludwickovemu modelu. Potrebno je poudariti, da so pridobljeni rezultati uporabni v inženirski praksi. Namreč, v okviru klasične teorije stabilnosti so upoštevane le infinitezimalne motnje, kar avtomatično pomeni omejitev analize na lokalno območje. Mehansko stanje je lahko tedaj le stabilno oz. nestabilno. To pa seveda za inženirsko prakso ni dovolj, saj se lahko nosilec, kot je prikazano v prispevku, ukloni že ob majhni končni motnji, torej mnogo prej, preden je dosežena bifurkacijska sila. To pa pomeni $P_{kritična} \leq P_{bif}$.

Literatura

- [1] J. H. Jung, T. J. Kang, *Large deflection analysis of fibers with nonlinear elastic properties*, Textile Res. Journal., **75**(10), 715-723, 2005.
- [2] M. Brojan, T. Videnič, F. Kosel, *Large deflections of nonlinearly elastic non-prismatic cantilever beams made from materials obeying the generalized Ludwick constitutive law*, Meccanica, **44**, 733-739, 2009.
- [3] C. Y. Wang, *Post-buckling of a clamped-simply supported elastica*, Int. J. Nonlin. Mech., **32**(6), 1115-1122, 1997.
- [4] V. V. Kuznetsov, S. V. Levyakov, *Stability analysis of planar equilibrium configurations of elastic rods subjected to end loads*, Acta Mech., **211**, 73-87, 2010.
- [5] J. H. Maddocks, *Stability and folds*, Arch. Rational. Mech. Anal. **99**(4), 301-328, 1987.



Teoretična optimizacija letalskih propelerjev

J. Sodja¹, D. Stadler² in T. Kosel³

Theoretical Optimisation of Aircraft Propellers

Povzetek. Pričujoči prispevek predstavlja teoretični pristop k aerodinamski optimizaciji oblike propelerskih krakov glede na največjo učinkovitost pri pretvorbi razpoložljive pogonske moči v koristno delo. Prispevek podrobneje predstavlja Betzov optimizacijski pogoj ter Prandtlovo in Goldsteinovo rešitev optimizacijskega problema. Povzeta je tudi primerjava med teoretičnimi in numeričnimi rezultati.

Abstract. Theoretical approach to geometrical optimization of propeller blades with intention to maximize efficiency of transforming engine power to useful propulsive power is presented in the article. Furthermore Betz optimisation criterion along with Prandtl's and Goldstein's analytical solution is presented in more detail. Comparison between theoretical predictions and numerical results is made and discussed briefly.

1 Uvod

Aerodinamska optimizacija oblike propelerjev glede na največjo učinkovitost pri pretvorbi razpoložljive pogonske moči v koristno delo zahteva medsebojno harmonizacijo številnih parametrov. Ti parametri so predvsem geometrijski, kot na primer premer propelerja, geometrijsko zvitje krakov, porazdelitev širine krakov ter uporabljeni aeroprofil vzdolž kraka. Zavedati se je potrebno, da so številni parametri izraženi kot porazdelitev vzdolž propelerskega kraka, kar v problem uvaja dodatno kompleksnost. »Porazdelitveni« parametri v numerični problem vnašajo veliko število prostostnih stopenj in »integralne« količine kot opazljivke. Jedro predstavljene optimizacije predstavlja Betzov pogoj optimalnosti. Betzov pogoj zaživi v povezavi s katerim od modelov propelerske akcije (MPA), ki omogoči določitev lastnosti propelerja ter lastnosti s strani propelerja inducirane tokovnega polja.[1],[2], [3]

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana

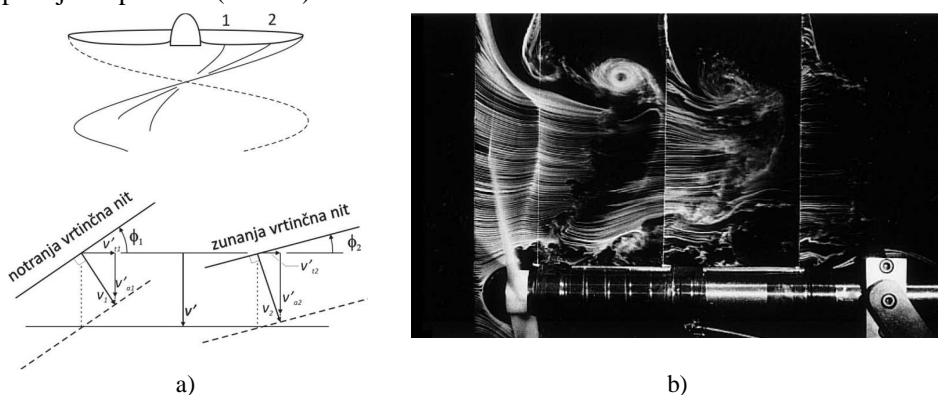
² Turboinštitut d.d., Ljubljana

³ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana

2 Betzov pogoj optimalnosti

Prandtlova razširitev teorije vrtničnih niti na krila končnih razsežnosti je omogočila učinkovito analitično obravnavo poljubnih oblik letalskih kril. Izkaže se, da je optimalna porazdelitev krilne obremenitve z minimalnim induciranim uporom je eliptične oblike. Eliptični krilni obremenitvi ustreza značilna vrtnična sled. V idealiziranem primeru je vrtnična sled eliptično obremenjenega krila plana in se vzdolž celotnega razpona s konstantno hitrostjo giblje v normalni smeri glede na samo sebe. Ta lastnost je lahko izpolnjena le, če je inducirana hitrost vzdolž celotnega razpona krila in vrtnične sledi konstantna. [4], [5], [6]

Teorijo optimalne krilne obremenitve Betz v 20-ih letih 20. stoletja razširi na letalske propelerje. Predpostavi, da mora biti rojena vrtnična sled propelerja z minimalnimi induciranimi izgubami toga helična vijačnica s konstantnim korakom v radialni smeri. Te vrtnične sledi se morajo ravno tako gibati v normalni smeri glede na svojo površino. V tokovnem polju daleč za propelerjem se topologija vrtnične sledi ne sme več spreminjati. Ponazoritev Betzovega pogoja in dimna vizualizacija vrtnične sledi propelerja sta prikazani na spodnji skupini slik (Slika 1).

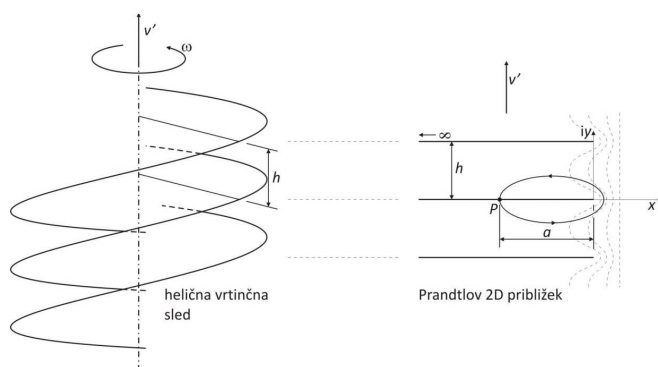


Slika 1: Betzovega pogoja (a) in dimna vizualizacija vrtnične sledi propelerja [7] (b)

Betz je s pomočjo analogije z vrtnično sledjo eliptično obremenjenega krila predvidel topološke lastnosti vrtnične sledi »eliptično« obremenjenega propelerja. Da bi lahko sklepali na dejansko obliko optimiranega propelerja, je potrebno povezati vrtnično sled takega propelerja s porazdelitvijo cirkulacije vzdolž propelerskih krakov. Prvo približno rešitev omenjenega problema je predlagal Prandtl. Točno rešitev problema pa je kasneje predlagal Goldstein. Prandtlova in Goldsteinova rešitev topološke lastnosti vrtnične sledi, ki jih definira Betzov pogoj prevedeta na specifično porazdelitev cirkulacije vzdolž propelerskih krakov, kar predstavlja osnovo za vključitev Betzovega kriterija v MPA.

2.1 Prandtlova cirkulacijska funkcija

Prandtl je ob pojavu Betzovega optimizacijskega pogoja predlagal približno rešitev. Prandtl je svojo rešitev izpeljal s primerjavo med tekočinskim tokom okrog vijačnice in tekočinskim tokom okrog pol-neskončnih ravnih plosč. Obtekanje pol-neskončnih plosč se obravnava v dveh dimenzijah, kar problem iskanja ustreznega tokovnega polja dodatno poenostavi. Primerjava je prikazana na spodnji sliki (Slika 2).



Slika 2: Prandtlova poenostavitev tokovnega problema okrog helične vrtnične sledi

Rešitev Prandtlovega tokovnega problema (Slika 2) se v obliki kompleksnega hitrostnega potenciala glasi:

$$W = \varphi + i\psi = -\frac{v'h}{\pi} \cos^{-1} \left(e^{\frac{\pi z}{h}} \right) \quad (1)$$

V gornji enačbi (1) φ predstavlja hitrostni potencial, ψ tokovni potencial, v' hitrost gibanja vrtnične sledi glede na okoliško tekočino, h razmik med posameznimi heličnimi vrtničnimi sledmi, z pa kompleksno koordinato $x + iy$. Dodatno je uvedeno napredovalno razmerje helične vijačnice daleč za propelerskim diskom $\lambda_1 = (v_0 + v')/\Omega R_{hp}$. [8]

S pomočjo izraza (1) se določi cirkulacijo prikazanega 2D tokovnega sistema. Prandtl korekcijski faktor pa se definira kot razmerje med cirkulacijo prikazanega 2D tokovnega sistema ter cirkulacijo idealiziranega 2D tokovnega sistema, v katerem se vsa tekočina ujeta med ravne poln-neskončne plošče giblje z enako hitrostjo v' . Tako definiran Prandtl korekcijski faktor se glasi:

$$F = \frac{2}{\pi} \cos^{-1}(e^{-f}) \quad (2)$$

$$f = \frac{\pi a}{h} \quad (3)$$

Prandtl korekcijski faktor se prenese na 3D tokovno polje propelerja kot korekcija vrtničnosti, ki jo generira idealiziran 3D model helične vijačnice, v katerem se ponovno vsa tekočina ujeta med posamezne vrtnične plasti giblje z enako hitrostjo v' . Goldsteinova cirkulacijska funkcija se s pomočjo Prandtlovega korekcijskega faktorja izraža kot:

$$G(\xi, \lambda_1) \cong \frac{F\xi^2}{\xi^2 + \lambda_1^2} \quad (4)$$

2.2 Goldsteinova cirkulacijska funkcija

Ob predpostavki, da propeler deluje v toku idealne, nestisljive tekočine, se Betzov pogoj optimalnosti prevede na reševanje enačbe (5) z ustreznimi robnimi pogoji (6). Uvede se hitrostni potencial φ . Enačba (5) predstavlja s hitrostnim potencialom izraženo kontinuitetno enačbo za idealno, nestisljivo tekočino. Robni pogoj (6) povzema dejstvo, da preko vrtnične sledi ne more biti nikakršnega toka tekočine. Tekočina omejena z vrtnično sledjo se v normalni smeri na vrtnično sled lahko giblje le s hitrostjo s katero se v tej smeri giblje vrtnična sled sama. Ulomek $\partial\varphi/\partial n$ predstavlja na vrtnično sled normalno komponento

hitrosti. V izrazu (6) simbol ϕ skladno s sliko **Slika 1 a)** označuje naklonski kot helične vrtnične sledi. [9]

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = v' \cos(\phi) \quad (6)$$

Rešitev enačb (5) in (6) je težko določljiva. Goldstein je zato uvedel dodatno predpostavko o nizki obremenitvi propelerja. Predpostavka poenostavi problem, saj z njeno uveljavitvijo aksialna komponenta inducirane hitrosti postane zanemarljiva v primerjavi s hitrostjo napredovanja propelerja. Posledično se poenostavi tudi sama geometrija helične vrtnične sledi. Ta zavzame konstantno obliko vzdolž celotne osi vrtenja propelerja. Ob dodatni predpostavki je Goldstein uspel izračunati in tabelirati porazdelitev vezane cirkulacije za dvo- in štiri- kraki propeler. Kasneje Theodorsen z vključitvijo induciranih hitrosti v izračun uspešno posploši Goldsteinovo rešitev na propelerje s poljubno obremenitvijo. Ob Theodorsenovi posplošitvi se pojavi dodaten problem s preslikavo vrtničnosti oziroma cirkulacije s helične vrtnične sledi daleč za propelerjem na propelerski krak vezano cirkulacijo oziroma vrtničnost. Helična vijačnica se v prehodnem območju med propelerjem in območjem »dovolj daleč za propelerjem« v radialni smeri skrči. Ravno tako se spremenijo vrednosti induciranih hitrosti. [10], [11]

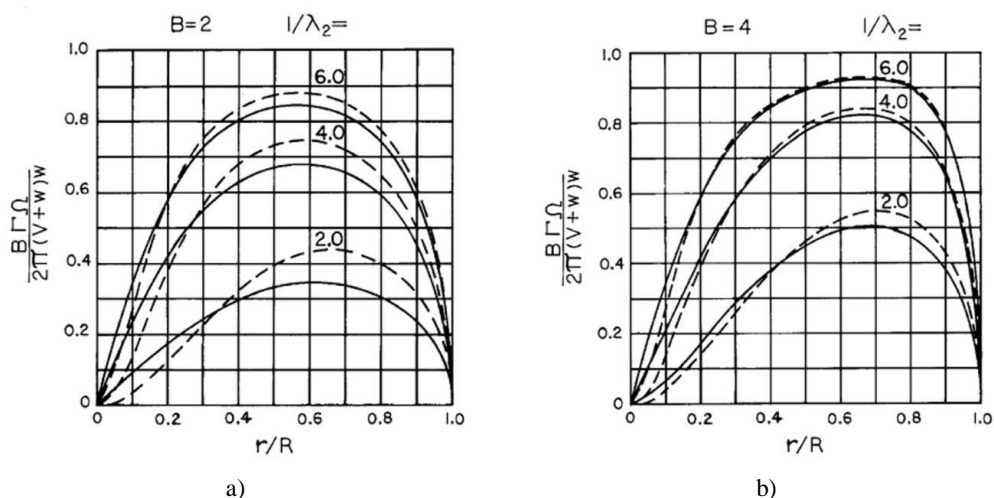
Goldsteinova cirkulacijska funkcija je definirana kot brezdimenzijski faktor:

$$G(r_1) = \frac{\Gamma(r_1)}{h w} \quad (7)$$

V gornjem izrazu (7) h predstavlja osno razdaljo med dvema sosednjima vijačnima vrtničnima površinama, ki sestavljajo helično vrtnično sled propelerja. w označuje aksialno hitrost pomikanja helične vrtnične plasti glede na okoliško tekočino.

Zaradi težavnosti izračuna cirkulacije $\Gamma(r_1)$, se za $G(r_1)$ uporablja tabelirane vrednosti. $G(r_1)$ je dobro tabelirana za propelerje z dva do šest kraki in napredovalna razmerja na intervalu $\lambda_1 = 1/12$ do $\lambda_1 = 4$.

Spodnji slik (Slika 3) prikazujeta primerjavo med Goldsteinovo cirkulacijsko funkcijo in Prandtlovim približkom za dvo- in štiri-kraki propeler za nabor napredovalnih razmerij $\lambda_1 = 1/6, 1/4$ in $1/2$. Z obeh slik je lepo razvidno, da se Prandtlov približek dobro ujema z eksaktno Goldsteinovo cirkulacijsko funkcijo za zunanje segmente propelerskih krakov in nižja napredovalna razmerja. Ravno tako je iz medsebojne primerjave razvidno, da se kvaliteta Prandtlovega približka izboljšuje s povečevanjem števila propelerskih krakov.



Slika 3: Primerjava Goldsteinove cirkulacijske funkcije (polna črta) s Prandtlovim približkom (prekinjena črta): a) dvokraki propeler, b) štirikraki propeler [3]

3 Rezultati

Pri teoretični optimizaciji je bila uporabljena Prandtlova formulacija cirkulacijske funkcije ter momentno-segmentni (BEM) MPA. Prandtlova formulacija je bila uporabljena zato, ker omogoča enostaven način določanja cirkulacijske funkcije za poljubne vrednosti B in λ . BEM model je bil izbran na osnovi medsebojne primerjave med različnimi MPA. [12] Primerjava različnih MPA nakazuje, da so napovedi kompleksnejših MPA le neznatno boljše od BEM. Implementacija BEM sledi Adkinsonovem postopku [1].

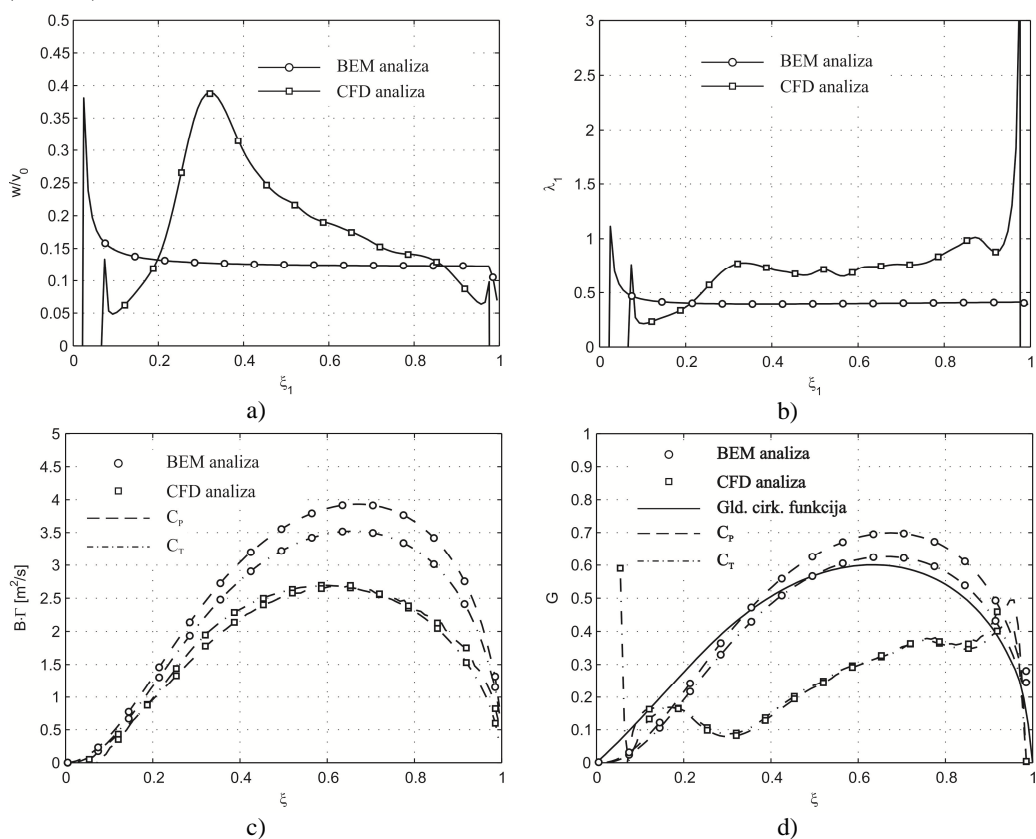
3.1 Optimizacijska točka

Predstavljeni optimizacijski postopek je predstavljen na primeru optimizacijske točke (Tabela 1). Rezultati optimizacijskega algoritma pa so primerjani z rezultati numerične simulacije računalniške dinamike tekočin (CFD). Delovni pogoji so izbrani tako, da odražajo za letalstvo ultralahke ter športne kategorije značilne delovne pogoje. ClarkY je tipičen predstavnik aeroprofila, ki se uporablja v takih letalskih propelerjih. [13], [14]

Tabela 1: Definicija optimizacijske točke

Parametri propelerja		Parametri aeroprofila		Delovni pogoji	
Parameter	Vrednost	Parameter	Vrednost	Parameter	Vrednost
D	1m	α	3°	v_0	40 m/s
B	3	C_L	0.548	n	2400 rpm
Aeroprofil	ClarkY	C_D	0.0257	P	10 kW
		ϵ	21.3		

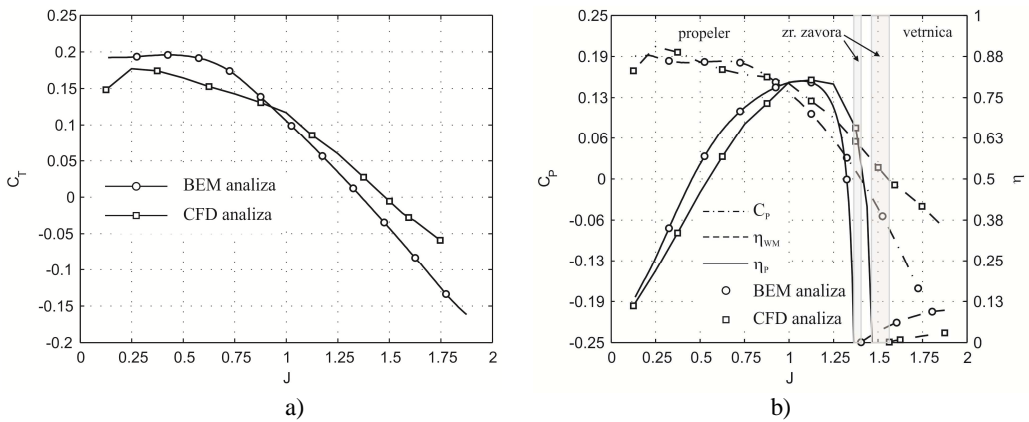
Optimalnost teoretičnih napovedi je bila ocenjena s pomočjo količin w , λ_2 , Γ in G . w , aksialna hitrost vrtničnega sistema in λ_1 , napredovalno razmerje v oddaljenem tokovnem polju, so tokovni parametri, ki v primeru optimalne oblike propellerskega kraka zavzamejo od radialne smeri značilno funkcijsko odvisnost. Ta mora biti v skladu z Betzovim pogojem, torej konstantna vzdolž radija. Γ , na propellerski krak vezana cirkulacija in G , Goldsteinova funkcija so parametri, ki odražajo porazdelitev obremenitve vzdolž propellerskega kraka. S preračunom Γ v G se pridobi tudi neposreden vpogled v optimalnost oblike propellerskega kraka glede na Goldsteinovo normalizacijo. Rezultati so prikazani na spodnji skupini slik (Slika 4).



Slika 4: Primerjava teoretičnih in CFD rezultatov parametrov w , λ_1 , Γ in G v optimizacijski točki

3.2 Rezultati integralnih količin

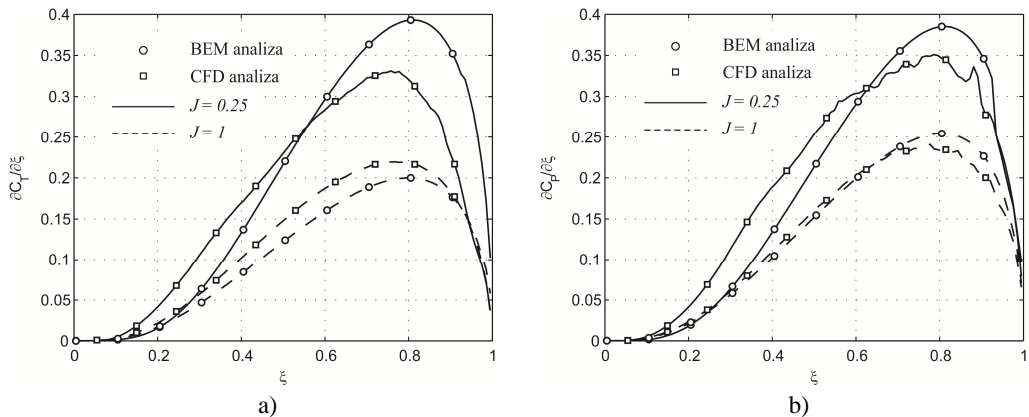
Izdelani algoritem omogoča poleg optimizacije tudi analizo lastnosti propellerskih krakov pri različnih delovnih pogojih. Potisna sila (C_T), trošena moč (C_P) ter izkoristek propelerja η so prikazani na spodnji skupini grafov (Slika 5). Vse količine so podane v obliki brezdimenzijskih koeficientov v odvisnosti od napredovalnega razmerja J . Prikazani rezultati nakazujejo dobro ujemanje med CFD simulacijo in teoretičnim modelom.



Slika 5: Vlečna sila (a)) ter trošena moč (b)) v odvisnosti od napredovalnega razmerja J

3.3 Distributivni rezultati

Prikazana je primerjava med teoretičnimi napovedmi in CFD rezultati za porazdelitev potisne sile ($\partial C_T / \partial \xi$) in trošene moči ($\partial C_P / \partial \xi$) vzdolž propelerskega kraka v primeru dveh različnih napredovalnih razmerij. Kljub temu, da je v primeru integralnih količin ujemanje med teoretičnimi in numeričnimi rezultati dobro, nastopa v primeru distributivnih količin med rezultati kar nekaj razlik. Odstopanja so opazna predvsem za serijo rezultatov pri napredovalnem razmerju $J = 1$, kjer je ujemanje med integralnimi količinami zelo dobro, med njihovimi porazdelitvami pa nastopa kar nekaj razlik. V vseh primerih teoretični model napove višjo obremenitev na konicah propelerskih krakov, medtem ko numerični rezultati napovedujejo bolj enakomerno porazdeljeno obremenitev po celotni dolžini kraka. Razlika nastopa tudi v sami višini maksimalnih obremenitev.



Slika 6: Porazdelitev potisne sile (a)) in trošene moči (b)) vzdolž prop. kraka

4 Zaključek

Predstavljen teoretični model omogoča optimiranje propelerskih krakov na pogoje definirane v optimizacijski točki. Teoretični model omogoča tudi analizo aerodinamskih lastnosti

propelerskih krakov na širšem intervalu delovnih pogojev. Preprostosti BEM MPA ter privzetim predpostavkam navkljub se teoretične napovedi v primeru optimizacijske točke ter integralnih količin dobro ujemajo z rezultati numeričnih simulacij. Analiza porazdelitve potiska in moči vzdolž propelerskega kraka razkriva predvsem topološke razlike v posameznih porazdelitvah.

Literatura

- [1] Charles N Adkins and Robert H Liebeck, "Design of Optimum Propellers," *Journal of Propulsion and Power*, 1994.
- [2] Eugen E Larrabee, "Five Years Experience with Minimum Induced Loss Propellers - Part I: Theory," *SAE Technical Paper Series*, p. 10, 1984.
- [3] Quentin R. Wald, "The aerodynamics of propellers," *Progress in Aerospace Sciences*, vol. 42, pp. 85-128, 2006.
- [4] Albert Betz, "Screw Propellers with Minimum Energy Loss," *Gottingen Reports*, pp. 193-213, 1919.
- [5] Louis Melville Milne-Thomson, *Theoretical Aerodynamics*. New York: Dover Publications, 1973.
- [6] Miroslav Nenadović, *Osnovi aerodinamičkih konstrukcija - elise i propeleri*, tretja izdaja ed. Beograd: Institut tehničkih nauka srpske akademije nauka i umetnosti, 1987.
- [7] T Watanabe, H H Nigim, and H S Koyama, "The effects of propeller tip vane on flow-field behavior," *Experiments in Fluids*, pp. 410-417, 1997.
- [8] Lev Davidovič Landau and Evgenij Mihailovič Lifshitz, *Fluid Mechanics*. Oxford, Velika Britanija: Butterworth Heinemann, 1987.
- [9] Sydney Goldstein, "On the Vortex Theory of Screw Propellers," St. John's College, Cambridge, 1929.
- [10] John L Crigler, "Application of Theodorsen's Theory to Propeller Design," Langley Aeronautical Laboratory, Langley Field, Report 924, 1948.
- [11] C. L. Tibery and J. W., Jr. Wrench, "Tables Of The Goldstein Factor," Applied Mathematics Laboratory, David Taylor Model Basin, Washington, DC, Report 1534, 1964.
- [12] Ohad Gur and Aviv Rosen, "The Aeronautical Journal," *Comparison between blade-element models of propellers*, vol. 112 No 1138, 2008.
- [13] Nilay Sezer-Uzol and Lyle N Long, "3-D Time-Acurate CFD Simlations of Wind Turbine Rotor Flow Fields," in *44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, Nevada, 2006.
- [14] Eric W. M. Roosenboom, Arne Strümer, and Andreas Schröder, "Advanced Experimental and Numerical Validation and Analysis of Propeller Slipstream Flows," *Journal of Aircraft*, vol. Vol. 47, No. 1, pp. 284-291, January-February 2010.



Optimization of Powder Injection Moulding Binder through Bimodality and Addition of Short Molecular Chain Components

G.B. Stringari¹, J. González-Gutiérrez¹, B. Zupančič¹, G. Kubyshkina², B.S. von Bernstorff³ and I. Emri¹

Optimizacija sestave veziva v tehnologiji injekcijskega brizganja prahu z uvajanjem bimodalnosti in dodajanjem kratkih molekulskih verig

Abstract. This study examines the possibility of using bimodal polyoxymethylene (POM) as the main component of the binding agent used in powder injection molding technologies by presenting its time-dependent and thermal properties and comparing them to monomodal POM. In addition, possible optimization of the binder formulation was investigated by adding short molecular weight polymeric chains (wax) to bimodal POM. Measurements shown that the magnitude of the complex viscosity for the commercial bimodal material was more than 81% lower than for its monomodal counterpart in the whole range of frequencies studied. A further reduction on viscosity values were observed as the content of short molecular polymeric chains was increased, without compromising the thermal and mechanical properties of the binder. A new formulation of bimodal POM plus 8 wt.% of added wax concentration seems to provide the most appropriate results, lowest viscosity without significantly changing creep compliance values and thermal properties.

Povzetek. V članku je obravnavana možnost uporabe bimodalnega polioksimetilena (POM) kot osnovnega vezivnega sredstva v tehnološkem procesu injekcijskega brizganja prahu: V ta namen je predstavljena analiza časovno odvisnih in termičnih lastnosti bimodalnega POM v primerjavi z monomodalnim POM. Poleg tega je obravnavana tudi možnost optimizacije formulacije polimernega veziva preko dodajanja krajših molekulskih verig (voska z nizko molekularno težo) v bimodalno POM matrico. Rezultati meritev so pokazali, da je velikost kompleksne viskoznosti komercialnega bimodalnega POM več kot 81% nižja od velikosti kompleksne viskoznosti monomodalnega POM v celotnem analiziranem območju frekvenc. Nadaljnje nižanje viskoznosti je bilo doseženo tudi z večanjem dodatka krajših molekulskih verig, brez da bi bile pri tem zaznavno poslabšane termične in mehanske lastnosti veziva. Izkazalo se je, da najugodnejše rezultate daje mešanica bimodalnega POM z 8wt.% dodatkom krajših molekulskih verig, saj je na ta način dosežena ustrezno znižana viskoznost veziva, medtem ko so spremembe v strižni voljnosti in termičnih lastnostih zanemarljive.

¹ Center for Experimental Mechanics, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Slovenija

² Elektromaterial Lendava d.d., Slovenija

³ BASF Aktiengesellschaft, Nemčija

1 Introduction

Powder injection molding (PIM) is one of the most versatile methods for the manufacturing of small complex shaped components from metal, ceramic or cemented carbide powders for the use in medical, automotive, electronics, firearms, and consumer industries [7-11]. PIM combines the shaping efficiency of plastic injection molding with the capabilities of powder metallurgy to produce solid hard metallic or ceramic pieces [12]. PIM offers unique advantages for the mass production of small complex parts. Compared to traditional manufacturing methods, precise and reproducible shapes can be obtained at a significantly reduced price [1]. Complex shapes can be easily manufactured using PIM technology, while conventional powder metallurgy is limited to the production of simpler geometries. Finally, the use of finer powder particles in PIM feedstock, allows for the densification of parts during sintering which yields high performance parts made of material systems that are difficult to sinter using conventional methods [12]. PIM is generally best suited to produce parts measuring less than 6 mm thick and weighting less than 100 grams [3]. Therefore, industries that demand miniaturization of complex components can benefit from using PIM in their manufacturing process.

The PIM process begins by mixing the inorganic powder with a polymeric binder, followed by the injection of this mixture in a mold with the desired form, debinding and then sintering. From the mentioned stages of this process, debinding is certainly the most expensive and time-consuming of them. Among the techniques applied nowadays, catalytic debinding of polyoxymethylene (POM) based binder systems is considered to be one of the most successful ones, due to the higher debinding rates and lower risk of cracking when compared to thermal and solvent techniques. Catalytic debinding uses either nitric or oxalic acid vapor at temperatures higher than 110° C to depolymerize POM into formaldehyde gas [7]. It is observed that the debinding rate is proportional to the temperature at which the process is executed. However, this operating parameter is limited by the increasing dimensional distortion as the melting temperature of POM is approached [11].

Low viscosity at the molding temperature and a high drop in viscosity at high shear rate are very important properties of the binder for mold filling with less energy. This is particularly important when dealing with complicated geometries [1]. When cooled, the binder should be strong and rigid to prevent distortion of the molded part. Finally, high thermal conductivity, low thermal expansion coefficient, good adhesion with powder, no orientation, and be chemically passive with respect to the powder are also desirable properties that should be taken into account when selecting a binder [6]. It has been reported that bimodal polymeric materials exhibit some of these desirable properties like resistance to deformation in solid state [4] and low viscosity at high shear rates [9]. Therefore, it is reasonable to think that the properties of POM-based binders can also be improved by changing their molecular weight distribution.

The present work focuses on the characterization of thermal and time-dependent properties of different formulations of bimodal POM-based materials. The aim is to understand how the addition of short polymeric chains influences the macroscopic properties of POM and thus design a binder more suitable to the requirements of PIM technology.

2 Materials and Methods

Monomodal (MO-0) and bimodal (BI-0) POM were supplied by BASF (Germany). Bimodal POM was modified by adding different concentrations (1, 2, 4, 8 and 16 wt.%) of a compatible polymer with low molecular weight (referred as ‘wax’ due to confidential terms). The blends of bimodal POM and wax were prepared by mixing the two components in a twin-screw extruder seven times. Neat bimodal POM was also extruded (BI-0E) in order to ensure the same initial conditions for investigated series of POM blends. The nomenclature given for all POM-based materials studied can be found in Table 1.

Table 1: Description of the POM-based materials investigated

Designation	Components	Category	Added Wax	Extrusions
MO-0	Ultramold® N2320	Monomodal-POM	-	-
BI-0	Ultramold® Z2320	Bimodal-POM	-	-
BI-0E	Ultramold® Z2320	Bimodal-POM	-	7
BI-1E	Ultramold® Z2320 + Wax	Bimodal-POM	1%	7
BI-2E	Ultramold® Z2320 + Wax	Bimodal-POM	2%	7
BI-4E	Ultramold® Z2320 + Wax	Bimodal-POM	4%	7
BI-8E	Ultramold® Z2320 + Wax	Bimodal-POM	8%	7
BI-16E	Ultramold® Z2320 + Wax	Bimodal-POM	16%	7

Viscosity measurements were performed in a Haake MARS (Modular Advanced Rheometer System) purchased from Thermo Scientific (Germany) by means of small amplitude oscillatory shear tests in the molten state according to ASTM D-4440 [2]. All the experiments were performed at 210°C, using a cone-plate geometry ($D = 20$ mm; $\alpha = 1^\circ$). Two frequencies sweep were performed in each measurement, the first one increasing from 0.1 s^{-1} (0.628 rad/s) to 100 s^{-1} (628.32 rad/s) and the second one decreasing from 100 s^{-1} to 0.1 s^{-1} , in order to monitor any possible flow instability. All measurements were performed applying a shear stress of 200 Pa, previously determined to be in the linear viscoelastic region of the materials. The reported results are the average of ten repetitions for each of the materials studied.

Creep measurements in the solid state were performed using the methodology developed at the Center for Experimental Mechanics at the University of Ljubljana [5]. Initial part of the creep measuring procedure started with the annealing phase at higher temperature (120°C) to erase mechanical stress-strain history of the material. After the annealing phase the torsional creep measurements were performed in segmental form at 5 different temperatures (70, 90, 100, 110 and 120°C) in the time scale of 3 hours, under loading in shear by a constant torque ($1.4 \cdot 10^5$ Pa). Master curves were obtained by shifting curves at a given temperature using the time-temperature superposition principle. All creep measurements were performed in duplicate with the repeatability within experimental error of the measuring setup.

Thermal properties were measured by differential scanning calorimetry (DSC) according to ISO 11357-3 [8]. All the thermal measurements were done in a DSC7 instrument, produced by Perkin Elmer (USA), under nitrogen flush with a flow rate of 50 ml/min. Mass of used specimens ranged from 9.9 to 10.1 mg. Each test was performed at a scanning rate of 20°C/min in the following order: the sample was held at -5° C for 5 min, temperature was raised from -5 to 220 °C, material was held at 220 °C for 5 min followed by cooling from 220 to -5 °C, sample was held one more time at -5 °C for 5 min and finally it was heated again from -5 to 220 °C. The reported results were averaged over three repetitions carried out for each of the materials studied.

A more detailed description of the equipment, the experimental conditions, sample preparation and analysis methodology used is provided elsewhere [10].

3 Results and Discussion

3.1 Viscosity measurements

The viscosity of all materials was investigated in frequency domain. Based on these measurements, it is clear that all materials investigated show a nearly constant magnitude of the complex viscosity at low frequencies, followed by a drop at higher frequencies, which is commonly referred as a shear-thinning behavior. The viscosity results can be summarized using two parameters: $|\eta^*|_{\omega \rightarrow \min}$ and $|\eta^*|_{\omega \rightarrow \max}$. The first parameter represents the magnitude of the complex viscosity at the lowest angular frequency in which experiments were performed (0.628 rad/s), while the second parameter is the magnitude of the complex viscosity at the highest frequency reachable by the experimental set up (628.3 rad/s). The viscosity results are shown in Fig. 1.

It is clear that the addition of short polymeric chains resulted in materials with better flowability. The commercial bimodal POM (BI-0), which has a higher content of short polymeric chains, shows a significant decrease in viscosity in both low and high frequencies in comparison to monomodal POM (MO-0). The reduction of viscosity is a consequence of the introduced short polymeric chains, which can act as internal lubricants reducing the friction between the long chains, particularly when subjected to high shear rates. The extrusion protocol used to prepare POM/wax blends led also to a reduction on viscosity; it was observed that BI-0E had about 4% lower viscosity than BI-0 due to the breaking of longer chains during extrusion cycles. Regarding the new formulations proposed in this work, it is possible to notice that the flowability of POM is clearly improved by increasing the concentration of wax added. For instance, by adding 16% of wax (BI-16E), $|\eta^*|_{\omega \rightarrow \max}$ is reduced in 21.8% when compared to BI-0E and in 22.5% when compared to BI-0. As already discussed in this work, improving flow properties is of extreme importance to mold filling of complex geometries as those usually found in powder injection molding.

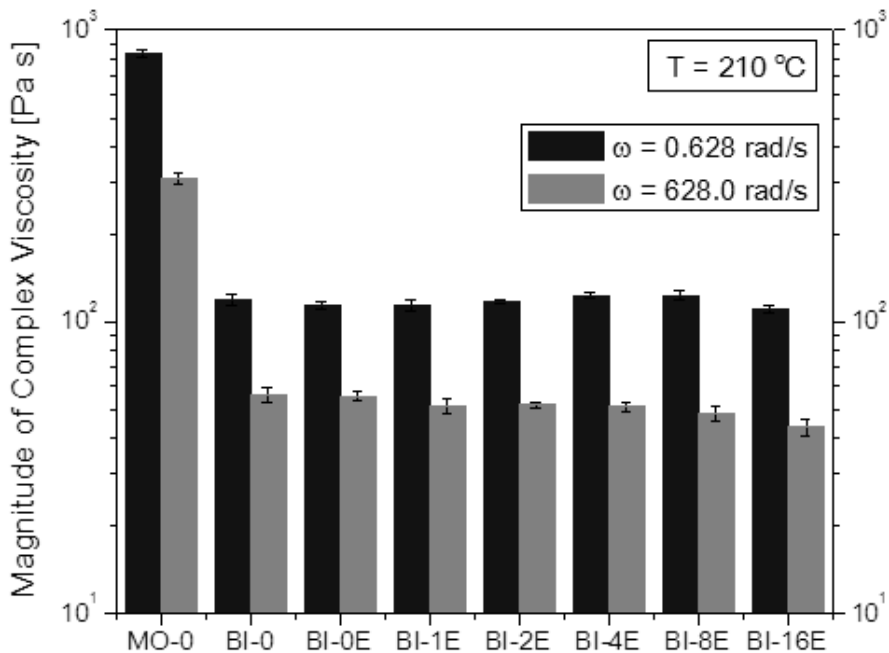


Figure 1: Magnitude of the complex viscosity at the minimum and maximum frequency studied for all materials investigated.

3.2 Creep measurements

Figure 2 shows the creep compliance determined at 120° C after 10^4 seconds for each of the POM-based materials investigated. Creep compliance values at this time and temperature enable a direct correlation to processing conditions, since both parameters are very similar to those commonly applied during catalytic debinding of POM. Therefore, a low value of creep compliance under these conditions is important to ensure minimal deformation of the molded part resulting in a better quality of the sintered product. It can be said that the extrusion protocol had a positive effect in materials performance since BI-0E has shown creep compliance 5.9% lower than BI-0 in the conditions here defined. From another standpoint, the addition of up to 2 wt.% of wax yielded no clear difference in creep compliance, in fact, BI-1E and BI-2E have shown slight improvement in the resistance to deformation as compared to BI-0E. On the other hand, materials BI-4E and BI-8E have shown creep compliance slightly higher than BI-0E (3.2 and 6.2% higher, respectively), however; still lower than the original bimodal material (BI-0). Finally, the highest creep compliance, and consequently lowest resistance to deformation among all materials investigated was observed for BI-16E.

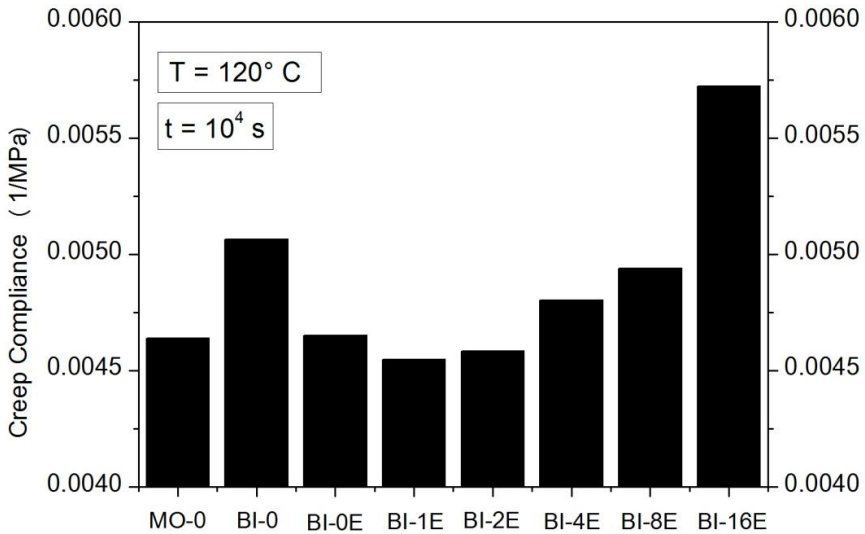


Figure 2: Creep compliance obtained at 120°C, after 10^4 seconds, for all materials.

3.3 Differential scanning calorimetry measurements

Table 2 shows the values of T_{onset} , T_{melt} , T_{end} , and T_{cryst} for all materials studied. It can be observed that there is no significant difference between MO-0 and BI-0 for any of these thermal parameters. In regards to the new formulations proposed in this work, a maximum in T_{melt} and T_{end} is observed for BI-1E and BI-2E. Even though that the variations cannot be considered statistically significant, it is interesting to point out that the maximum coincides with the maximum resistance to deformation observed in the creep measurements.

Table 2: Thermal parameters obtained for all materials investigated.

Material	T_{onset} (°C)	T_{melt} (°C)	T_{end} (°C)	T_{cryst} (°C)
MO-0	158.8 ± 0.7	165.8 ± 0.7	176.0 ± 4.3	134.0 ± 1.1
BI-0	157.4 ± 1.2	164.3 ± 3.2	170.0 ± 5.6	134.9 ± 2.8
BI-0E	156.8 ± 1.4	164.6 ± 2.4	172.5 ± 3.3	135.5 ± 1.2
BI-1E	157.0 ± 1.3	166.2 ± 3.2	174.6 ± 3.5	135.4 ± 0.5
BI-2E	157.7 ± 0.4	166.9 ± 1.4	175.7 ± 1.5	136.1 ± 0.7
BI-4E	157.5 ± 1.1	164.3 ± 1.3	172.6 ± 2.0	135.7 ± 1.0
BI-8E	157.1 ± 0.5	165.3 ± 1.9	172.7 ± 0.6	135.6 ± 0.9
BI-16E	157.2 ± 1.0	163.6 ± 0.9	170.9 ± 0.3	135.6 ± 1.2

Finally, no differences are observed for either T_{cryst} or T_{onset} . The most important thermal parameter to be evaluated is T_{onset} since debinding should take place at temperatures lower than it in order to avoid any dimensional distortion due to POM melting.

4 Conclusions

This work has shown that macroscopic properties of POM are sensitive to the addition of short polymeric chains. For instance, the commercial bimodal POM (BI-0) investigated presents thermal properties and time-dependent properties in solid state similar to those shown by standard monomodal POM (MO-0). However, BI-0 presents a much better flowability, which is extremely important to the cavity filling of complex geometries as those usually encountered during the powder injection molding process. The extrusion protocol has shown a positive effect in both the binder's flowability and its resistance to deformation. These results suggest that not only the ratio between long and short chains affects the time-dependent properties of POM, but also the distribution and interactions between them.

Also for the blends of POM and wax, it was seen that the addition of up to 2%wt of short polymeric chains to bimodal POM showed no considerable difference in any of the main properties investigated (melting temperature, viscosity, and creep compliance). However, the addition of higher concentrations, for instance 8%wt, can lead to improvements in POM performance. The investigated mixture of bimodal POM and 8%wt wax had viscosity values (at 210 °C) up to 13% lower than the commercial bimodal material submitted to the same extrusion protocol. At the same time the creep compliance of the same mixture is only 6.2% higher in the most critical condition studied (at 120 °C, after 10^4 s). It can be concluded that changing the modality of the molecular weight distribution may be an interesting tool for the optimization of binders designed to be used in powder injection molding technology.

References

- [1] S. Ahn, S.J. Park, S. Lee, S.V. Atre and R.M. German, *Effect of powders and binders on material properties and molding parameters in iron and stainless steel powder injection molding process*, Powder Technologies 193, 162--169, 2009.
- [2] ASTM International, *ASTM D4440-08 Standard Test Method for Plastics: Dynamic Mechanical Properties Melt Rheology*, Annual Book of ASTM Standards, 2008.
- [3] V. Boljanovic, *Powder metallurgy*. In Metal Shaping Processes: Casting and Molding, Particulate Processing, Deformation Processes, Metal Removal, 75--106, Industrial Press Inc., 2010.
- [4] I. Emri and B.S. von Bernstorff, *The effect of molecular mass distribution on time-dependent behavior of polyamides*, Journal of Applied Mechanics 73, 752-757, 2006.
- [5] R.M. German, *Powder injection molding*, 10-15, Metals Powder Industries Federation, 1990.

- [6] International Organization of Standardization, *ISO 11357-3: 1999. Plastics- Differential scanning calorimetry (DSC) - Part 3: Determination of temperature and enthalpy of melting and crystallization*, 1999.
- [7] S. Krug, J.R.G. Evans and J.H.H. ter Maat, *Effect of polymer crystallinity on morphology in ceramic injection molding*. Journal of the American Ceramic Society 84, 2750—2756, 2001.
- [8] P. Metlikovič and I. Emri, *Naprava za merjenje lezenja torzijsko obremenjenih polimernih preizkušancev*, Strojniški vestnik 36, 101-104, 1990.
- [9] A. Muñoz-Escalona, P. Lafuente, J.F. Vega and A. Santamaría, *Rheology of metallocene-catalyzed monomodal and bimodal polyethylene*, Polymer Engineering and Science 39, 2292-2303, 1999
- [10] G. B. Stringari, B. Zupančič, G. Kubyshkina, B. von Bernstorff and I. Emri, *Time-dependent properties of bimodal POM – Application in powder injection molding*, Powder Technology 208, 590--595, 2011.
- [11] R. Tandon, *Metal injection moulding*. In K.H.J Buschow, R. Cahn, M. Flemings, B. Ilschner, E. Kramer, S. Mahajan and P. Veysiere. Encyclopedia of Materials: Science and Technologies, 5439-5442, Elsevier Science Ltd, 2001.
- [12] H. Ye, X.Y. Liu and H. Hong, *Fabrication of metal matrix composites by metal injection molding – A review*. Journal of Material Processing Technology 200, 12--24, 2008.



Numerična simulacija toka tekočine v kanalu z določitvijo polja adsorpcijskega ravnotežja na njegovih stenah

T. Štimec¹, M. Hriberšek², S. Bašič¹ in J. Ravnik²

Numerical simulation of a flow in a channel with the determination of adsorption equilibrium on the walls

Povzetek. V prispevku je prikazana vpeljava SLD (Simplified Local Density) adsorpcijskega ravnotežnega modela v numeričen algoritem za simulacijo toka tekočine in prenosa toplote. Za obravnavo adsorpcijskega procesa je izbrana geometrija kanala, ki ima na površine sten naneseo tanko plast adsorbenta in na katerih je prisoten negativni toplotni tok. Z numeričnimi simulacijami je izvedena analiza vpliva tokovnih in toplotnih razmer na adsorpcijsko ravnotežje na stenah kanala.

Abstract. This article deals with implementation of SLD (Simplified Local Density) adsorption model for equilibrium calculations in a numerical algorithm for flow and heat transfer simulations. Chosen geometry is a channel with thin layer of adsorptive material on its walls, where constant negative heat flux is also present. Analysis of flow and heat influence on adsorption equilibrium is made by numerical simulations.

1 Uvod

Adsorpcijski procesi so v zadnjih desetletjih zaradi višanja cen energije in zaostrovanja ekoloških predpisov doživeli precejšen razvoj tako na področju ločevanja snovi kot energetskih aplikacij. Vrsto let je bila glavna truda usmerjena v raziskovanje na področju določevanja adsorpcijskega ravnotežja z različnimi modeli ter metodami. Od začetnih pol-empiričnih ravnotežnih modelov (Langmuir, Freundlich in Toth) je razvoj vodil do Monte Carlo (MC) simulacij in današnjih simulacij molekularne dinamike (MD). Kljub izjemno natančnim rezultatom adsorpcijskih ravnotežij, ki jih dajejo MC in predvsem MD simulacije pa se tovrstne metode zaradi izjemne računalniške zahtevnosti le redko uporabljajo v inženirskih aplikacijah. Srednjo pot med nenatančnimi empiričnimi modeli in računalniško zahtevnimi MC in MD simulacijami ponuja SLD (Simplified Local Density Model) [1]

¹ Esotech d.d., Velenje

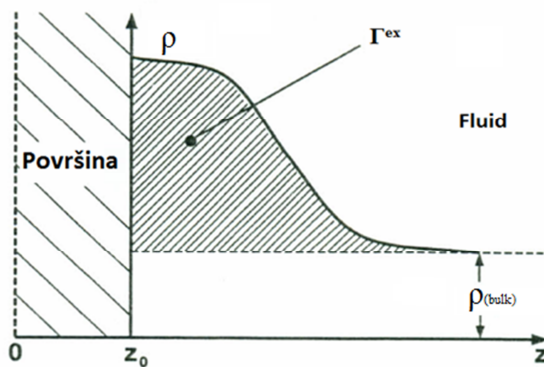
² Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

adsorpcijski ravnotežni model. SLD adsorpcijski model temelji na med-molekularnih interakcijah med molekulami adsorbata in atomi površine adsorbenta ter daje dovolj natančne rezultate za inženirsko rabo. Ob tem velja poudariti, da je SLD model računsko bistveno manj zahteven kot MC ali MD simulacije [3]. Običajno se vsi adsorpcijski modeli uporabljajo za določevanje adsorpcijskega ravnotežja para adsorbent-adsorbat pri znanih stacionarnih pogojih. Zaradi svoje računske nezahtevnosti je mogoče SLD adsorpcijski model vključiti tudi v kompleksnejše simulacije računalniške dinamike tekočin, saj ostanejo računski časi v sprejemljivih okvirjih.

Adsorpcijski materiali se najpogosteje uporabljajo v obliki nasutih plasti drobnih delcev, skozi katere teče adsorbat. Zaradi ekonomskih razlogov je smiselno adsorpcijski proces ciklično izmenjevati s procesom regeneracije, ki se izvaja s temperaturno ali tlačno spremembo. Z namenom hitrejšega izmenjevanja ciklov adsorpcije in regeneracije, se v zadnjem času raziskovalne aktivnosti usmerjajo na področje adsorpcijskih procesov v satovjih, kjer je adsorbent nameščen v obliki tankih plasti na površinah satovja[4]. V tanki plasti adsorbenta na površini je namreč mogoče mnogo hitreje izvesti temperaturni obrat in se lahko cikli adsorpcije in regeneracije izmenjujejo v nekajminutnih intervalih. Preprost model satovja predstavlja kanal pravokotnega preseka, ki ga obravnavamo v tem članku.

2 SLD adsorpcijski model

Obstaja več priznanih matematičnih oblik in definicij pojava adsorpcije, najpogosteje rabljena in nedvoumna pa je oblika, ki adsorpcijo definira s površinskim presežkom. Površinski presežek Γ^{ex} podaja število molov adsorbata na enoto površine, ki presegajo vrednost primera, da bi bila molarna gostota adsorbata homogena v celotnem volumnu fluida. Zaradi vpliva Van der Waalsovih sil med atomi površine in molekulami adsorbata v fluidu je ob površini adsorbenta molarna gostota adsorbata višja kot v glavnini fluida (kjer je vpliv atomov površine adsorbenta zanemarljiv). Integral vrednosti molarne gostote adsorbata od površine proti glavnini fluida, predstavlja površinski presežek Γ^{ex} . Napisana definicija velja ob vzpostavljenem adsorpcijskem ravnotežju in stacionarnih pogojih adsorpcijskega procesa. Površinski presežek je grafično ponazorjen na sliki 1.



Slika 1: Površinski presežek

$$\Gamma^{ex} = \int_{z_0}^{\infty} (\rho(z) - \rho_{bulk}) dz \quad (1)$$

V enačbi (1) predstavlja $\rho(z)$ delno molarno gostoto adsorbata na oddaljenosti z od površine, ρ_{bulk} predstavlja delno molarno gostoto adsorbata v glavnini fluida daleč od adsorpcijske površine, kjer je potencial med molekulami adsorbata in atomi površine adsorbenta enak nič. Spodnja meja integracije enačbe (1) je definirana z enačbo,

$$z_0 = \frac{\sigma_{ff}}{2} \quad (2)$$

kjer σ_{ff} predstavlja premer molekule adsorbata. Molekule adsorbata se obravnavajo kot toge sfere. Ob napisanem je nujno upoštevati predpostavko, da molekule nosilnega medija (v obravnavanem primeru zrak) ne sodelujejo v adsorpcijskem procesu in v SLD modelu niso zajete. SLD model omogoča določitev vrednosti delne molarne gostote adsorbata na katerikoli izbrani razdalji od površine adsorbenta in sicer na podlagi med-molekularnega potenciala. S tem omogoča določevanje površinskega presežka in s cikličnimi kalkulacijami napovedovanje adsorpcijskih izoterm na ravnih homogenih površinah. Slednje omogoča v širokem intervalu tlaka in temperature, njegova natančnost pa je v največji meri odvisna od natančnosti izbrane enačbe stanja, ki je del samega modela. V primeru modela v tem prispevku je bila izbrana Peng-Robinsonova enačba stanja. V primeru vzpostavljenega snovnega ravnotežja mora imeti kemijski potencial u v vsaki točki adsorbirane plasti molekul konstantno vrednost in biti enak kemijskemu potencialu v glavnini fluida, kar podaja naslednja enačba

$$u_{bulk} = u(z) . \quad (3)$$

Kemijski potencial v adsorbirani plasti v vsaki točki tvori prispevka kemijskega potenciala zaradi interakcij med molekulami adsorbata in kemijskega potenciala zaradi interakcij med molekulami adsorbata in atomi površine. Slednje podaja naslednja enačba

$$u(z) = u_{ff}(z) + u_{fs}(z) . \quad (4)$$

Index ff označuje interakcije med molekulami adsorbata, index $bulk$ označuje glavnino fluida, index fs pa označuje interakcije med molekulami adsorbata in atomi površine. Glede na pogoj, da ima kemijski potencial $u(z)$ v vsaki točki adsorbirane plasti konstantno vrednost, je mogoče predvidevati, da ima ob površini kemijski potencial $u_{ff}(z)$ najnižjo vrednost, z oddaljevanjem od površine pa se njegova vrednost približuje vrednosti u_{bulk} . Vrednost potenciala $u_{fs}(z)$ se obnaša ravno nasprotno in se od najvišje vrednosti ob površini približuje vrednosti 0 v glavnini fluida. Kemijski potencial homogeno porazdeljenih molekul adsorbata v glavnini fluida u_{bulk} je mogoče zapisati z naslednjo enačbo,

$$u_{bulk}(T) = u_0(T) + RT \ln[f_{bulk}/f_0] \quad (5)$$

kjer je u_0 referenčni kemijski potencial, f_{bulk} realni tlak adsorbata v glavnini fluida in f_0 referenčni realni tlak. Enako je mogoče zapisati tudi enačbo

$$u_{ff}(z) = u_0(T) + RT \ln[f_{ff}(z)/f_0] \quad (6)$$

za kemijski potencial $u_{ff}(z)$, kjer je $f_{ff}(z)$ prispevek k realnemu tlaku v točki z , zaradi interakcij med molekulami fluida. Kemijski potencial $u_{fs}(z)$ enega mola fluida je mogoče definirati kot vsoto potencialov posameznih molekul in atomov adsorpcijske površine $\Psi(z)$. V enačbi

$$u_{fs}(z) = N_A \Psi(z) \quad (7)$$

predstavlja N_A Avogadrovo število molekul v enem molu snovi. Iz enačb (5), (6) in (7) izhaja naslednji zapis za realni tlak fluida na oddaljenosti z od površine

$$f_{ff}(z) = f_{bulk} \exp \left[\frac{-\Psi(z)}{(kT)} \right]. \quad (8)$$

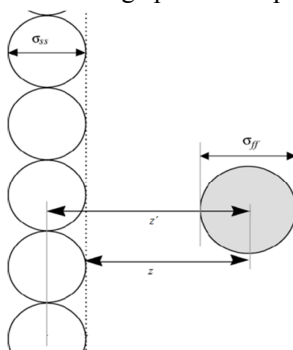
Med-molekularni potencial, ki izhaja iz interakcij med atomi površine in molekulo adsorbata je mogoče določiti z 10-4 Lee-jevim modelom [3]. Potencial za posamezno molekulo adsorbata podaja enačba

$$\Psi(z) = 4\pi\rho_{atoms}\varepsilon_{fs}\sigma_{fs}^2 \left(\frac{\sigma_{fs}^{10}}{5(z')^{10}} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \frac{\sigma_{fs}^4}{\{z' + (i-1)*\sigma_{ss}\}^4} \right), \quad (9)$$

$$\sigma_{fs} = \frac{\sigma_{ff} + \sigma_{ss}}{2}, \quad (10)$$

$$z' = z + \frac{\sigma_{ss}}{2} \quad (11)$$

kjer je ρ_{atoms} gostota atomov površine v mreži, ε_{fs} parameter interakcijske energije med molekulami fluida in atomi površine, σ_{ss} premer atomov površine, σ_{ff} premer atomov adsorbata, σ_{fs} razdalja med središčema atoma površine in molekule fluida, ko se le ta stikata in z' pomožna koordinatna vrednost. Enačbi (10) in (11) podajata določevanje σ_{fs} in z' . Grafično je izračun med-molekularnega potenciala prikazan na sliki 2.



Slika 2: Med-molekularni potencial

Določitev realnega tlaka (fugativnost) v glavnini fluida, kakor tudi v adsorbirani plasti, je mogoče določiti na podlagi enačbe stanja in sicer v predstavljenem primeru Peng – Robinsonove enačbe stanja

$$p = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a\alpha}{V_m^2 + 2bV_m - b^2}, \quad (12)$$

$$a = 0.45724 * \frac{(RT_c)^2}{p_c}, \quad (13)$$

$$b = 0.07780 * \frac{RT_c}{p_c}, \quad (14)$$

$$\alpha = (1 + (0.37464 + 1.54226\omega - 0.26992\omega^2)(1 - T_r^{0.5})), \quad (15)$$

$$T_r = \frac{T}{T_c}. \quad (16)$$

Iz navedenih enačb (12) – (16) je mogoče izpeljati enačbo za izračun realnega tlaka (fugacity), ki ima naslednjo obliko

$$\ln(f_{bulk}) = \frac{b}{V_m - b} - \frac{a\alpha}{V_m^2 + 2bV_m - b^2} * \frac{V_m}{RT} - \ln\left(\frac{V_m - b}{RT}\right) - \frac{V_m}{2.828bRT} \ln\left(\frac{V_m + 2.414b}{V_m - 0.414b}\right). \quad (17)$$

Za izračun realnega tlaka v adsorbirani plasti na površini je potrebno v zgornji enačbi parametre f_{bulk} , a_{bulk} , Y in V_m zamenjati z njihovimi ekvivalenti na določeni oddaljenosti z od površine, kot to prikazuje enačba

$$\ln(f_{bulk}) = \frac{b}{V_m(z) - b} - \frac{a(z)}{V_m(z)^2 + 2bV_m(z) - b^2} * \frac{V_m(z)}{RT} - \ln\left(\frac{V_m(z) - b}{RT}\right) - \frac{V_m(z)}{2.828bRT} \ln\left(\frac{V_m(z) + 2.414b}{V_m(z) - 0.414b}\right). \quad (18)$$

Vrednost parametra $a(z)$ v enačbi stanja, na določeni oddaljenosti od površine se izračuna po naslednjih enačbah

$$a(z) = a_{bulk} \left(\frac{5}{16} + \frac{6}{16} * \frac{z}{\sigma_{ff}} \right) \quad v \text{ območju } 0,5\sigma_{ff} \leq \frac{z}{\sigma_{ff}} \leq 1,5\sigma_{ff}, \quad (19)$$

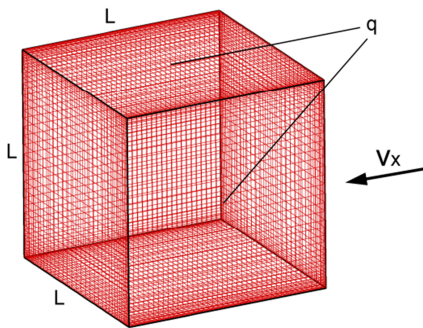
$$a(z) = a_{bulk} \left[1 - \frac{1}{8 \left(\frac{z - 1}{\sigma_{ff}^2} \right)^3} \right] \quad v \text{ območju } 1,5\sigma_{ff} \leq \frac{z}{\sigma_{ff}} < \infty. \quad (20)$$

S predstavljenimi enačbami je mogoče izračunati potek delne molarne gostote adsorbata od površine proti glavnini fluida, enako kot je prikazano na sliki 1. Določitev površinskega presežka, torej količine adsorbiranih molekul adsorbata pri izbrani temperaturi in tlaku, je nato mogoče izračunati po Simpsonovem pravilu. Algoritem za izračun vrednosti adsorpcijskega ravnotežja je naslednji:

- Iterativen izračun molarne gostote adsorbata v glavnini fluida s Peng-Robinsonovo enačbo stanja.
- Izračun realnega tlaka adsorbata v glavnini fluida po enačbi (17)
- Določitev n točk (izbran $n = 99$) pri katerih se določa vrednost lokalne molarne gostote
- Izračun lokalnega med-molekularnega potenciala v vsaki od n točk po enačbi (9)
- Izračun lokalnega realnega tlaka v vsaki od n točk po enačbi (8)
- Izračun konstante a enačbe stanja v vsaki od n točk po enačbah (19) in (20)
- Iterativen izračun vrednosti lokalne molarne gostote v vseh točkah po enačbi (18)
- Integracija vrednosti lokalnih molarnih gostot po Simpsonovem pravilu in s tem določitev adsorpcijskega ravnotežja

3 Numerična simulacija

Numerična simulacija je bila izvedena s programom, ki temelji na metodi robnih elementov [5], in ki je bil dodan podprogram za izračun adsorpcijskega ravnotežja v vseh točkah računskega območja. Omenjeni podprogram temelji na predstavljenem SLD modelu in za izračun vrednosti adsorpcijskega ravnotežja v vsaki posamezni točki jemlje vrednost temperature v tej točki, ki jo podaja izračun sistema Navier-Stokes-ovih enačb s podobno metodo robnih elementov. Za nosilni medij v simulacijah je bil izbran zrak pri 20°C, za adsorbat je bil izbran etilen in za adsorbent je bilo izbrano aktivno oglje. Koncentracija adsorbata v nosilnem mediju ima zanemarljivo vrednost in ne vpliva na tokovne, temperaturne in ostale pojave v kanalu. Geometrija kanala in robni pogoji simulacij so podani na sliki 3 in v tabeli 1. Računska mreža je imela 43^3 vozlišč, na vseh štirih stenah kanala pa je bil predpisan konstanten toplotni tok (hlajena stena).



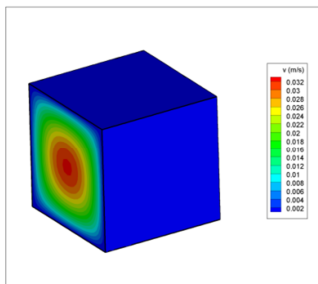
Slika 3: Geometrija z računsko mrežo

Parameter	Vrednost
ρ	1,17 kg/m ³
ν	1,57 x 10 ⁻⁵ m ² /s
c_p	1006 J/kgK
T_0	300 K
q	250,54 W/m ²
L	0,001 m
λ	0,0251 W/mK
Re	1
Pr	0,71
Ra	1

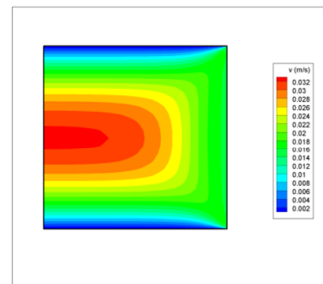
Tabela 1: Robni pogoji

4 Rezultati

Izračunano tokovno polje v kanalu je prikazano na naslednjih slikah.

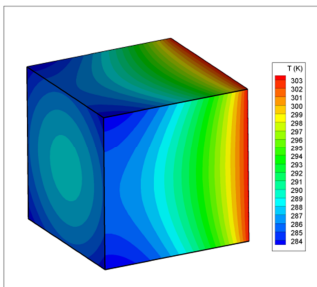


Slika 4: Polje absolutne hitrosti na izstopu

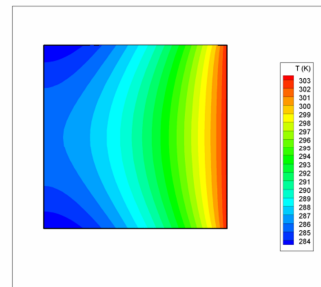


Slika 5: Polje absolutne hitrosti po sredinskem prerezu vzdolž kanala

Izračunano temperaturno polje je prikazano na naslednjih slikah 6 in 7.

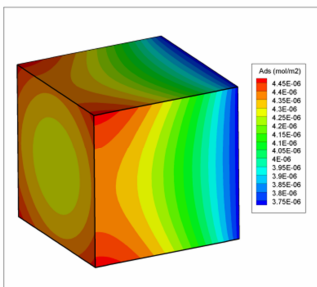


Slika 6: Temperaturno polje v kanalu

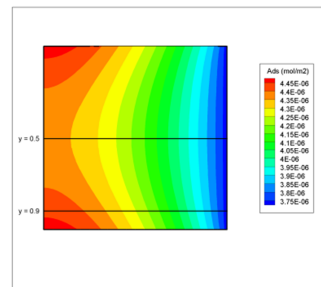


Slika 7: Temperaturno polje po sredinskem prerezu vzdolž kanala

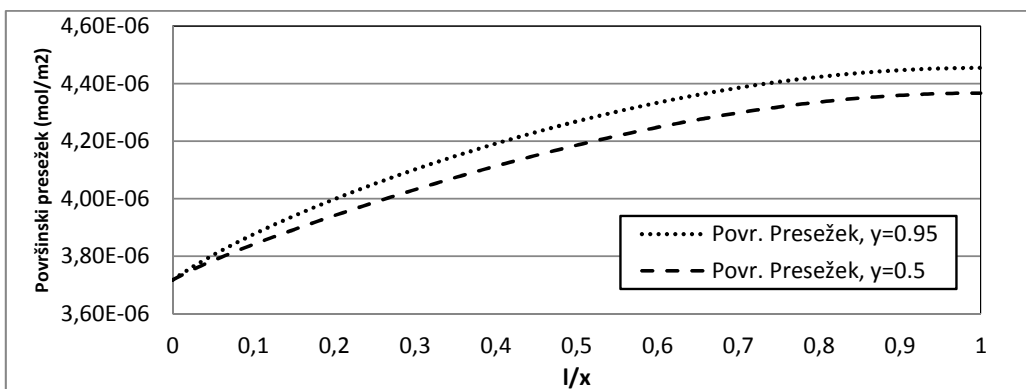
Tako tokovno kot temperaturno polje se razvijeta v skladu s pričakovanju in nista osrednjih predmet zanimanja tega članka. Izračunano polje adsorpcijskih ravnotežij na stenah kanal je prikazano na slikah 8 in 9.



Slika 8: Polje ravnotežnih vrednosti



Slika 9: Polje ravnotežnih vrednosti po sredinskem prerezu vzdolž kanala



Slika 10: Vrednosti adsor. ravnotežij na steni kanala pri $y = 0.5$ in $y = 0.9$

Adsorpcijska ravnotežja na slikah 8 in 9 so prikazana v molih adsorbiranih molekul na m² aktivne površine adsorbenta. Aktivno oglje ima običajno do 3000m² aktivne površine na gram snovi, kar pomeni da imajo že zelo tanki nanosi adsorbenta na stenah kanalov znatne aktivne površine. Na sliki 10 so prikazane vrednosti adsorpcijskega ravnotežja na steni kanal vzdolž prečne osi oddaljene 0.5 ali 0.9 od izhodišča geometrije. Parcialen tlak adsorbata je imel konstantno vrednost in sicer 1000000Pa.

5 Zaključki

Pregled rezultatov razkriva skoraj linearno odvisnost adsorpcijskega ravnotežja od temperature pri izbranih robnih pogojih. Iz temeljitejše analize odvisnosti adsorpcijskega ravnotežja od temperature je mogoče zaključiti, da je temu tako le v ožjem temperaturnem območju, ki se ne namenoma ujema s temperaturnim območjem izvedenih simulacij. Vključitev podprograma za izračun adsorpcijskega ravnotežja v numeričen algoritem za izračun toka tekočine je prvi korak v smeri celovitega modeliranja adsorpcijskega procesa v predstavljeni geometriji. Vrednosti adsorpcijskih ravnotežij na steni kanala nam že same po sebi nudijo dovolj informacij za enostavno optimizacijo geometrije ali ostalih parametrov, ob nadaljnjem delu je z združitvijo SLD modela z modelom prenosa snovi moč pričakovati še boljši vpogled v sam proces. S tem se bodo bistveno povečale možnosti za inženirske izboljšave na obravnavanem področju.

Zahvala: Operacijo delno financira Evropska Unija in sicer iz Evropskega socialnega sklada.

Operation part financed by the European Union, European Social Fund.

6 Literatura

- [1] B. Rangarajan, C. Lira, R. Subramanian, Simplified local density model for adsorption over large pressure ranges, *AIChE Journal* 41 (1995), 838-844
- [2] R. Subramanian, H. Pyada, C. Lira, An engineering Model for Adsorption of Gases onto Flat Surfaces and Clustering in Supercritical Fluid, *Ind. Eng. Chem. Res.* 34 (1995), 3830-3837
- [3] A. Fedorov, R. Viskanta, Heat/Mass Transer and Adsorption Dynamics in a Honeycomb Adsorbent: Application of the Simplified Local Density model, *Thermal Sci. Eng. Vol. 6, No. 1* (1998)
- [4] A. Fedorov, R. Viscanta, Analysis of transient heat/mass transer and adsorption/desorption interactions, *Int. Journal of Heat & Mass Transer* 42 (1999), 803-819
- [5] J. Ravnik, L. Skerget and Z. Zunic: Combined single domain and subdomain BEM for 3D laminar viscous flow *Eng. Anal. Bound. Elem.* 33 (2008), Issue 3



Optimiranje hitrosti planiranja preleta jadralnega letala

T. Trojner¹, F. Kosel² in V. Šajn³

Optimal gliding speed for glider cross country flying

Povzetek. V članku je opisan matematični model za izračun optimalne hitrosti planiranja pri preletu jadralnega letala. Z aproksimacijsko funkcijo je popisana polara planiranja jadralnega letala in izpeljan matematični algoritem za izračun optimalne hitrosti preleta pri klasičnem termičnem jadraniu. Algoritem predstavlja nadgradnjo teorije Paula MacCready-ja z bolj natančnim popisom gibanja v termičnem vzgorniku. Izpeljani algoritmi so v celoti analitično izračunljivi in se lahko implementirajo v programe za izračun preleta.

Abstract. In this article a new mathematical model for optimal glider speed to fly calculation is described. Glider soaring polar is approximated with analytical function and mathematical algorithm for optimal speed to fly in normal thermal soaring is developed. Introduced algorithm is upgrade of known Paul MacCready algorithms with better thermal lift description. Calculated algorithms are in analytical form and can be easily implemented in soaring software.

1 Uvod

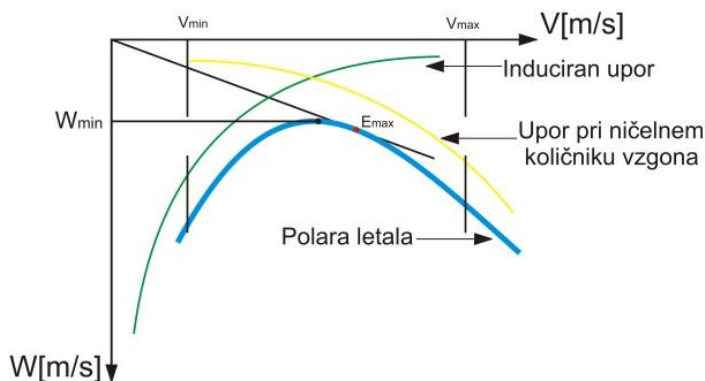
Pri jadralnih tekmovanjih v preletu piloti imajo nalogo da v čim krajšem času odletijo dano pot. Jadralno letalo nima lastnega pogona in za ohranitev hitrosti mora zmanjševati višino. Da bi preletel dano nalogo mora pilot poiskati področja dvigajočega zraka - vzgornik in pri letu v njem nabrati potrebno višino. Ko pilot nabere zadostno višino se usmeri proti cilju in planira z izbrano hitrostjo do naslednjega vzgornika. Izbira hitrosti planiranja značilno vpliva na čas potreben za prelet. Glede na velikost dviganja v vzgorniku je možno določiti optimalno hitrost planiranja.

Teorijo optimalne hitrosti je prvič opisal Wolfgang Späte leta 1938 [1,2]. V 50tih letih je teorijo dopolnil Paul MacCready [3,4] in leta 1956 postal svetovni prvak v jadralnih preletih. MacCready-jev model dobro deluje v pogojih mirne atmosfere, pri izračunu optimalne hitrosti planiranja pa ne upošteva možnosti spuščanja zračne mase med posameznimi termičnimi vzgorniki.

Z uporabo aproksimacijske funkcije smo popisali polaro jadralnega letala. Izvedli smo optimizacijo časa potrebnega za prelet enega jadralnega cikla. Na osnovi algoritma smo za različne meteorološke pogoje izračunali optimalne hitrosti preleta za štiri različna jadralna letala.

2 Aproksimacija polare planiranja jadralnega letala

hitrostjo v mirujoči atmosferi. Tipična oblika polare jadralnega letala je podana na Sliki 1 kjer je v horizontalna hitrost letala in w hitrost spuščanja jadralnega letala. Polaro letala večinoma določimo z meritvami na prototipu. Na grafu je tudi razvidna hitrost minimalnega spuščanja v_{wmin} ter hitrost optimalne finese v_{fopt} , pri kateri letalo z določene višine leti najbolj daleč. Izguba višine jadralnega letala pri planiranju je večinoma posledica izgub zaradi dveh vrst uporov: inducirane upora krila in upora letala pri ničnem količniku vzgona. Polari leta z upoštevanjem inducirane upora krila in upora letala pri ničnem količniku vzgona sta predstavljeni na Sliki 1.



Slika 1: Polara planiranja jadralnega letala.

Na osnovi prejšnje predpostavke smo naredili matematičen model funkcije polare jadralnega letala pri premočrtnem planiranju. Vertikalna hitrost spuščanja letala zapišemo s horizontalno hitrostjo

$$w(v) = f(v) \cdot v, \quad (1)$$

kjer je $f(v)$ finesa letala, ki jo zapišemo z razmerjem med količnikom vzgona krila C_y in upora letala C_x

$$f(C_x, C_y) = \frac{C_y}{C_x}. \quad (2)$$

Količnik upora letal zapišemo s količnikom upora letala pri ničelnem vzgonu krila C_{x0} in količnikom inducirane upora krila letala [5]

$$C_x(C_y) = C_{x0} + \frac{C_y^2}{\pi\lambda} \cdot (1 + \delta), \quad (3)$$

kjer je λ vitkost krila letala in δ količnik, ki upošteva povečanje inducirane upora pri neeliptični porazdelitvi vzgona po krilu. Z upoštevanjem (2) lahko zapišemo funkcijo finese letala v odvisnosti od količnika vzgona

$$f(C_y) = \frac{C_{x0} + \frac{C_y^2}{\pi\lambda} \cdot (1 + \delta)}{C_y} = \frac{C_{x0}}{C_y} + C_1 \cdot C_y, \quad (4)$$

kjer je C_1 konstanta, ki opisuje vpliv oblike in vitkosti krila na velikost inducirane upora.

$$C_1 = \frac{1 + \delta}{\pi\lambda}. \quad (5)$$

Količnik vzgona lahko zapišemo s hitrostjo leta jadralnega letala

$$C_{L0} = \frac{2mg}{\rho v^2} = C_{L0} \cdot \frac{1}{v^2} \quad (6)$$

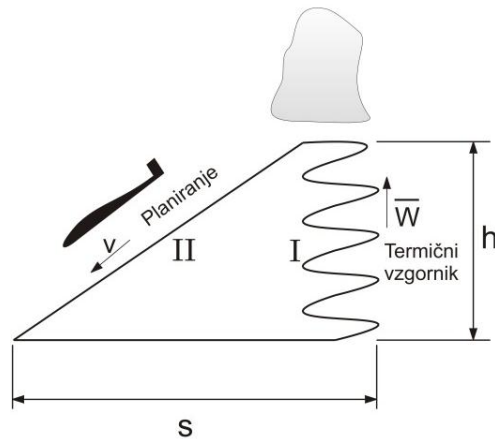
$$f(v) = \frac{C_{x0}}{C_2} v^2 + C_1 C_2 \frac{1}{v^2}, \quad (8)$$

ter dobimo končno obliko aproksimacijske enačbe polare letala

$$w(v) = \frac{C_{x0}}{C_2} v^3 + C_1 C_2 \frac{1}{v}. \quad (9)$$

3 Optimiranje hitrosti preleta

Pri klasičnem jadranju pilot pridobi višino s kroženjem v vzgorniku. Ko letalo pridobi dovolj višine, zapusti vzgornik in nadaljuje let proti naslednjemu vzgorniku. En jadralni cikel predstavlja kroženje v termičnem vzgorniku in prelet do enake višine, kot je bila na začetku kroženja v termičnem vzgorniku. Jadralni cikel je predstavljen na Sliki 2.



Slika 2: Cikel jadralnega preleta.

Čas izvedbe cikla t je sestavljen iz časa vzpenjanja t_t v termičnem vzgorniku in časa planiranja ter t_p

$$t = t_t + t_p, \\ t_t = \frac{h}{w} \text{ in } t_p = \frac{s}{v}, \quad (10)$$

kjer je h višina dviganja in s pot pri preletu. Zaradi majhnih kotov planiranja lahko privzamemo da je horizontalna komponenta hitrosti letala in dejanska preletena pot enaka hitrosti letala in poti s . Celoten čas cikla, ob upoštevanju finese letala pri preletu je

$$t = \frac{s \cdot f(v)}{w} + \frac{s}{v}. \quad (11)$$

Enačbo odvajamo po hitrosti. Najkrajši čas potreben za izvedbo cikla dobimo z rešitvijo naslednje enačbe v končni obliki

$$\frac{1}{w} \frac{df(v)}{dv} - \frac{1}{v^2} = 0. \quad (12)$$

Z odvajanjem (8) dobimo

$$\frac{df(v)}{dv} = \frac{2C_{x0}}{C_2} v - 2C_1 C_2 \frac{1}{v^3}, \quad (13)$$

in z uvedbo v (12) dobimo končno obliko

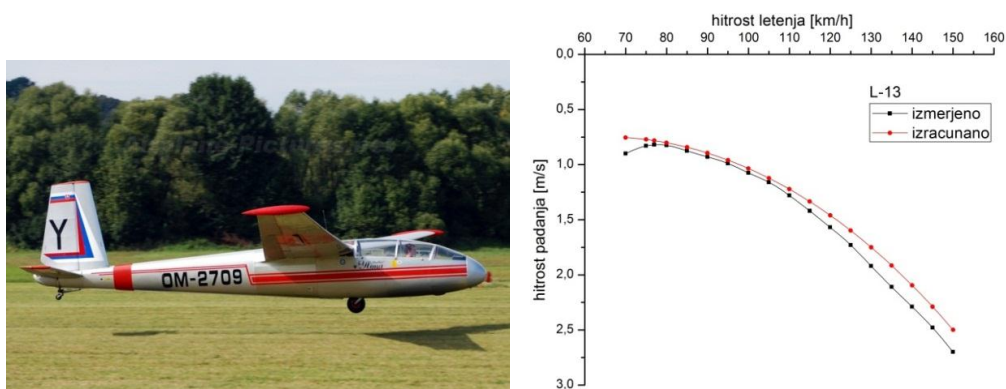
$$v^4 - v \frac{C_2 \bar{w}}{2C_{x0}} - \frac{C_1 C_2^2}{C_{x0}} = 0. \quad (14)$$

4 Izračun in rezultati

Na osnovi algoritma smo izvedli izračune preleta za naslednja jadralna letala: ASW22 na Sliki 5a spada med najbolj zmogljiva letala na svetu, letalo KKB-15 Slika 6a je bilo narejeno samo v dveh primerkih, med tem ko velja letalo DG300-ELAN na Sliki 4a v današnjem času za prehodno letalo, Blanik L-13 na Sliki 3a pa je šolsko letalo. Iz grafov polar in tehnično dostopnih podatkov smo iz izmerjene velikosti in hitrosti optimalne finese določili količnik ničelnega upora letala C_{x0} [6]

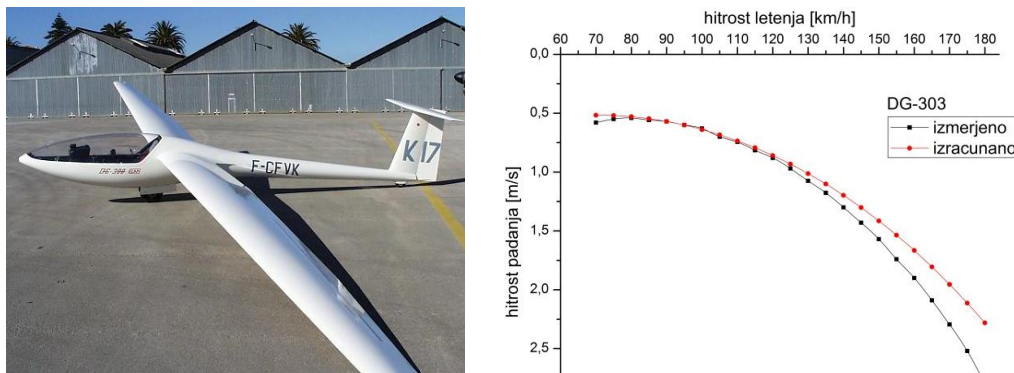
$$C_{x0} = \frac{\pi}{4(1+\delta)} \lambda f^2 \quad (12).$$

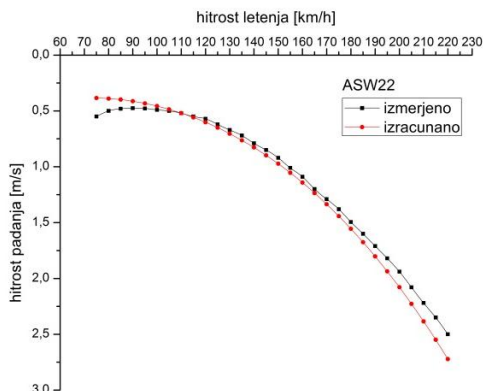
Na osnovi izračunanega količnika ničelnega upora smo izračunali aproksimacijske polare in jih primerjali z izmerjenimi na Slikah 3b, 4b, 5b in 6b.



Slika 3: a) Šolsko jadralno letalo Blanik L-13: Razpon kril: 16.20 m, površina kril: 19.20 m², vitkost krila: 13.69, prazna teža: 292 kg, maksimalna vzletna teža: 500 kg, finesa letala: 1:28, pri hitrosti: 86 km/h, b) Izmerjena in izračunana polara, izračunan C_{x0} : 0,013.

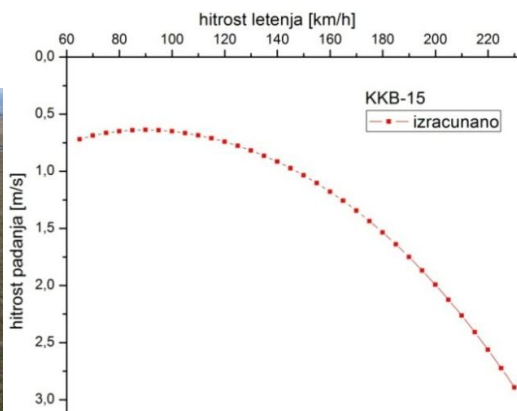
Najboljše ujemanje med izračunanimi in izmerjenimi deli polare dobimo okrog hitrosti najboljše finese. Odstopanja nastanejo pri najnižjih hitrostih, ker nastopi povečanja upora zaradi separacije dela toka na zgornjem delu krila in trupa in pri najvišjih hitrostih kjer pride do delne separacije na spodnjem delu krila letala [7]. Model najboljše pokrije jadralno letalo odprtega tipa ASW22, ker ima zakrilca s katerimi poveča območje vpadnih kotov krila pri katerih ne pride do delnih separacij toka na krilu in trupu.





Slika 5: a) Jadralno letalo odprtega razreda ASW22: Razpon kril: 26.58 m, površina kril: 16.70 m², vitkost krila: 42.31, prazna teža: 465 kg, maksimalna vzletna teža: 750 kg, finesa letala: 1:62, pri hitrosti: 93 km/h, b) Izmerjena in izračunana polara, izračunan C_{x0} : 0,0085.

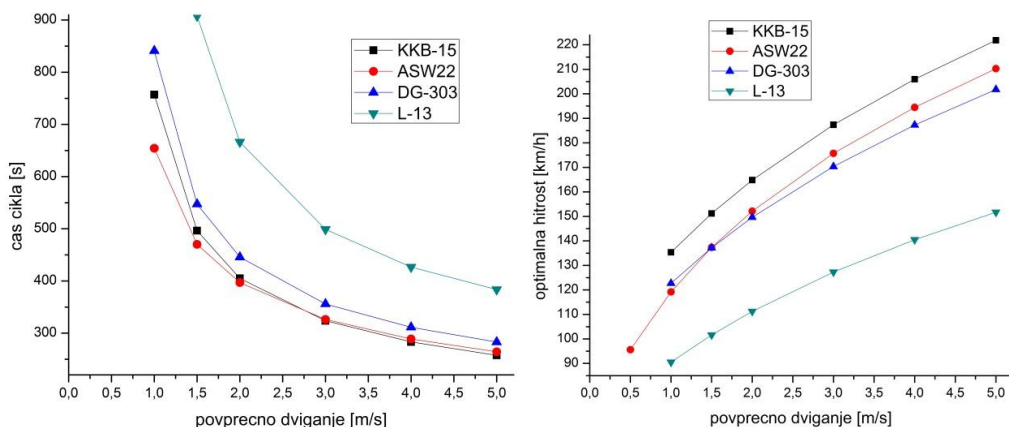
Odstopanje aproksimirane polare od izmerjene letala ASW22 je pri hitrosti 215 km/h +8.5%. Pri jadralnem letalu Blanik L-13 je odstopanje -8.2% sicer pri hitrosti 150 km/h. Največja odstopanja med izmerjenimi in izračunanimi hitrostmi spuščanja smo ugotovili pri letalu DG300-ELAN in sicer -20.1% pri hitrosti 180 km/h. Gre za letalo starejše generacije in je po izkušnjah pilotov in tudi lastnih izkušnjah neprimerno za tekmovanja pri pogojih velikih termičnih dviganj in visokih hitrostih planiranja. Pri jadralnih letalih Blanik L-13 in DG300-ELAN je aproksimirana polara dajala precenjene rezultate, le pri jadralnem letalu ASW22 pa je aproksimirana polara dala podcenjene rezultate glede na meritve. Vzrok za pojav je treba iskati v značilnem zmanjšanju konstrukcijskega kota spodnjega dela konture aeroprofila jadralnega letala [8].



Slika 6: a) Visoko sposobno jadralno letalo 15 metrskega razreda KKB-15: razpon kril: 15 m, površina kril: 10.01 m², vitkost krila: 22.48, prazna teža: 250 kg, maksimalna vzletna teža: 500 kg, finesa letala: 1:45, pri hitrosti: 133 km/h, b) Izračunana polara in C_{x0} : 0,0083.

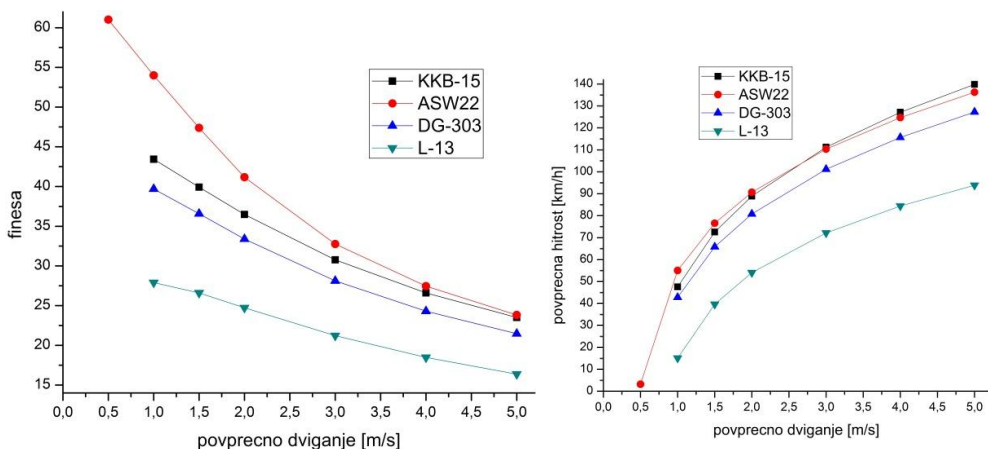
Naredili smo izračune za prelet razdalje 10 km v meteorološkem okolju centralne Evrope. Pri sprejemljivo dobrem termičnem dnevu so največja povprečna dviganja razreda 2.5 m/s. Večja dviganja so možna pri visoki nestabilnosti atmosfere ali pa zaradi lokalne orografije. Na Sliki 7 so predstavljeni izračunani grafi časa potrebnega za izvedbo cikla ter optimalne

enega cikla. Letalo ASW22 potrebuje manj višine in posledično manj časa za kroženje v termičnem vzgorniku zaradi bolj ugodne finese in manjšega lastnega padanja v vzgorniku. Z letali KKB-15 ter DG-300 ELAN moramo krožiti dlje časa in s tem pridobiti večjo višino, nato pa letimo hitreje.

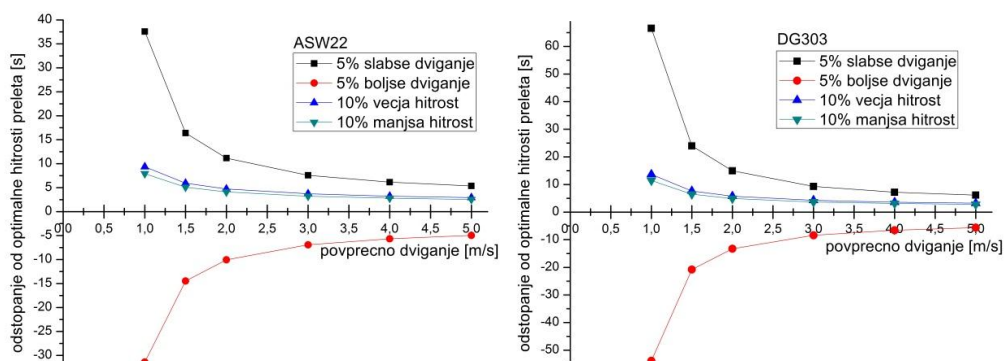


Slika 7: a) Najkrajši čas potreben za izvedbo cikla, b) Optimalna hitrost planiranja

Šolsko letalo Blanik L-13 zaradi velikega lastnega padanja sploh ne more leteti pri majhnih dviganjih kot ostala letala, pri večjih dviganjih, pa so časovna odstopanja tako velika da je nekonkurenčno. Treba pa je opozoriti da letala spadajo v različne tekmovalne razrede in tako ne tekmujejo med seboj. Na Sliki 8 so predstavljeni grafi finese pri planiranju z optimalno hitrostjo in povprečne hitrosti preleta. Letalo ASW22 je tudi najboljše glede finese, pri povprečnem dviganju vzgornika 2 m/s ima pri planiranju z optimalno hitrostjo 148 km/h fineso 1:41.8. Ob enakem povprečnem dviganju ima KKB-15 pri planiranju fineso 1:37.1 in potrebuje 12.6% večjo višino za prelet. Pri dviganjih večjih od 2.5 m/s pa tehnično manj napreden KKB-15 dosega višje povprečne hitrosti. Letalo KKB-15 je namensko zasnovano za prelete pri večjih dviganjih kar potrjujejo tudi izračuni. Žal pa ni optimalen za letenje v Evropskem klimatskem območju kjer so povprečna dviganja večja od 2m/s bolj redka. Aeroprofil letala ASW22 je posebej zasnovan za letenje v Evropskem klimatskem območju.

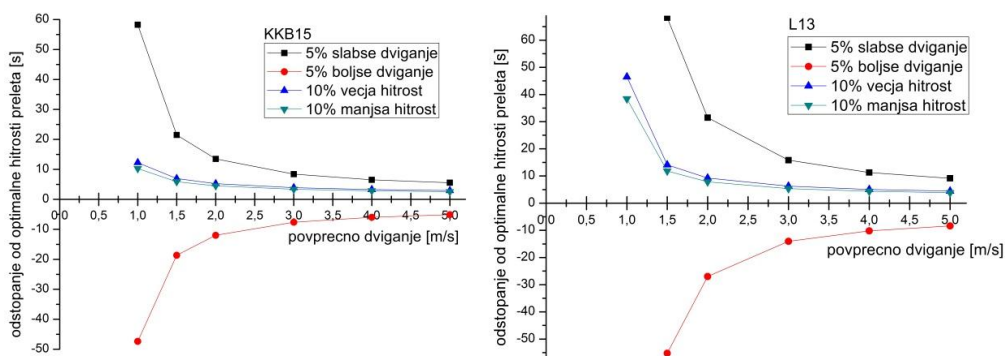


tudi odvisna od pilotove uspešnosti centriranja termičnih vzgornikov. Vidimo, da je časovna razlika zaradi odstopanja hitrosti planiranja od optimalne večja pri šibkih dviganjih, med tem ko je pri močnejših dviganjih razlika zanemarljiva. To se zelo dobro ujema z izjavami tekmovalnih pilotov da se večdnevna tekmovanja pri preletih dobijo pri termično slabših dnevih.



Slika 9: a) Časovno dostopanje ASW 22, b) Časovno dostopanje DG-303 ELAN

Pri najbolj zmogljivem jadralnem letalu ASW22 je pri povprečnem dviganju 2 m/s podaljšanje časa enega cikla pri 10% večji hitrosti od optimalne 4.8 s, pri 10% večji hitrosti od optimalne pa je 4.5 s. Pri 5% večjem povprečnem dviganju se čas cikla skrajša za 9.8 s in pri 5% manjšem povprečnem dviganju pa se podaljša za 11.3 s. KKB-15 in DG-303 ELAN po vrstnem redu sledita zmogljivostmi letala ASW22. Šolsko jadralno letalo Blanik L-13 je najbolj občutljivo na odstopanja pri izbiri optimalne hitrosti planiranja ob že tako nekonkurenčnih časih potrebni za preleta cikla. Iz rezultatov je tudi razvidno da predvsem pri šibkih dviganjih samo 5% boljše ali slabše dviganje pomeni do 30s razlike v primerjavi z optimalnim časom, med tem ko se pri močnejših dviganjih ta razlika bistveno zmanjša. Tako velika časovna razlika je na tekmah odločilnega pomena, saj potrjuje izkušnje jadralnih pilotov da se tekmovanja zmagujejo tisti, ki pri slabih meteoroloških pogojih za jadranje naredijo najmanj napak.



Slika 10: a) Časovno dostopanje KKB-15, b) Časovno dostopanje L-13

tovarniških polar. Najbolj pravilne rezultate dobimo pri letalih, ki med letom uporabljajo negativna zakrilca, v našem primeru letalo ASW22.

Boljši rezultati se lahko dobijo z nadgradnjo aproksimacijske funkcije, ki bolj natančno popiše polaro letala predvsem pa upošteva dejstvo da konstantni del količnika upora ni enak količniku upora ničelnega upora, temveč mu se vrednost spreminja s kotom. Izjema je letalo ASW22, za katerega predpostavljamo da ima ustrezno zasnovano spodnjo konturo aeroprofila krila. Potrebno je tudi upoštevati konstrukcijski kot krila glede na trup jadralnega letala saj je repni del trupa v ugodnem položaju le pri načrtovani hitrosti leta. Izjemi sta letali ASW22 in KKB-15 s krilci po celotni razpetini letala.

Naredili smo model za izračun optimalnih hitrosti planiranja. Rezultati se dobro ujemajo s podatki, ki jih zelo skopo ponujajo proizvajalci. Časi potrebni za izvedbo cikla se krajšajo z večanjem povprečne hitrosti dviganja. Iz rezultatov je razvidno da je možno izboljšati povprečne hitrosti preleta z optimizacijo aeroprofila jadralnega letala za izbrano območje povprečnih gibanj. Pri manjših povprečnih hitrostih gibanja je izbira hitrosti planiranja bolj kritična in časovne izgube večje. Temu pritrjujejo tudi izkušnje jadralnih pilotov tekmovalcev, ki trdijo da se tekmovanja odločajo pri slabih termičnih pogojih za jadralno letenje.

Algoritmu za prelet lahko dodamo možnost uporabe taktike »delfinjeva leta« pri katerem zgolj letimo skozi vzgornike in ne krožimo. Pri nadgradnji modela preleta lahko tudi upoštevamo meteorološko lastnost da so dviganja v vzgornikih odvisna od višine in termičnega časa. Model bi lahko razširili tako, da bi z merjenjem moči dviganj preko celega dneva določil optimalno višino in nato pilota opozarjal kdaj leti previsoko ter kdaj prenizko.

Ob vsem tem je potrebno ponoviti, da je to matematični model. Vsak pilot ima med letenjem svojo taktiko, ki je lahko dobra, lahko pa slaba. Pilot se mora zmeraj odločati, ali bo upošteval priporočila računalnika in s tem morda tvegala izven letališki pristanek oziroma kaj hujšega ali pa bo letel z nekim zadržkom do priporočene hitrosti in se varno vrnil domov.

Največje razlike med povprečnimi in dobrimi nastanejo pri pravilnih odločitvah. Izkušnje, ki pridejo z leti pripomorejo pilotom, da znajo predvidevati, kje bodo najmočnejša dviganja in kdaj jih zavrteti. Najboljši piloti porabijo tudi najmanj časa, da centrirajo dviganje in tudi s tem pridobijo pomembne sekunde oziroma minute. Dobri piloti znajo tudi najboljše oceniti vremenske razmere in znajo svojo pot vnaprej prilagoditi.

Literatura

- [1] H. Zuerl, *Kampf im Aufwind, Unter Mitarbeit führender Männer des Segelflugs, Wolfgang Späte, Segelflug im Blaue*, E.S. Mittler & Sohn, Berlin. 32, 1943.
- [2] A. Edwards, *Optimum Speed to fly between thermals calculator- Letters*, VGC News. 94, 36, 1998.
- [3] D Johnson, *Competitive Philosophy*, Proceedings of Soaring Symposia, 1972.
- [4] W. Schumann, *The Price You Pay for McCready Speeds*, Proceedings of Soaring Symposia, Cumberland, Md., 1974.
- [6] W.P. Phillips, *Mechanics of Flight*, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey 2004.
- [5] E. Torenbeek, H. Wittenberg, *Flight Physics*, Springer, Dordrecht 2009.
- [7] D. Althaus, F.X. Wortmann, *Stuttgarter Profilkatalog*, IAG-Institut für Aerodynamik und Gasdynamik der Universität Stuttgart, Stuttgart, 1972.
- [8] D. Gregel, *Optimalna oblika profila kril za jadralna letala z maksimalnim območjem majhnega upora*, doktorsko delo, Ljubljana, 1976.



Modeliranje razlitja nafte v morskem okolju

D. Žagar¹, M. Ličer² in V. Malačič²

Oil spill modelling in marine environment

Povzetek. V prispevku predstavljamo procese, ki nastopijo ob razlitju nafte na morju in model NAFTA3, s katerim smo izvedli simulacije potencialnega razlitja v Tržaškem zalivu. Poleg advekcije in turbulentne difuzije je v modelu upoštevano še mehansko širjenje nafte ter izhlapevanje. Rezultati simulacij so uporabni tako za določanje ukrepov neposredno ob nezgodi kot za študijo dolgotrajnejšega vpliva na okolje. Model nadgrajujemo z dodatnimi procesi, ki imajo velik vpliv na potovanje, širjenje in razgradnjo razlite nafte v morskem okolju.

Abstract. This document describes the processes occurring during oil spills in marine environment and the NAFTA3 model used to simulate a potential spill event in the Gulf of Trieste. Mechanical spreading and evaporation were taken into account, as well as advection and turbulent diffusion. The results can be used either for deciding on actions to be taken in case of an oil spill or to study long-term environmental effects. The model is currently being upgraded with additional processes that significantly affect propagation, spreading and fate of oil in the marine environment.

1 Uvod

Razlitje nafte v morskem okolju je ena najhujših okoljskih nesreč, ki lahko prizadenejo morsko območje. Razlitja imajo dolgotrajne posledice tudi na številne gospodarske panoge, najhujše nedvomno na ribištvo, marikulturo in turizem. Čeprav v obe pristanišči v Tržaškem zalivu pripluje razmeroma veliko število tankerjev s surovo nafto ali derivati (leta 2005 v Trst 405 in v Koper 220 [11]), razlitja večjih razsežnosti na tem območju še ni bilo. Tudi majhna razlitja ob potopitvi večjega turističnega plovila ali zaradi izpusta balastnih voda s tankerjev imajo lahko na tem območju hude posledice zaradi majhnih dimenzij, zaprtosti in bogate biotske raznovrstnosti zaliva. Pozimi, ko so na območju Tržaškega zaliva pogoste vremenske situacije z močnim vetrom ali zmanjšano vidljivostjo, in poleti, ko je povečan pomorski promet zaradi turistične plovbe, je nevarnost razlitja razmeroma velika.

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

² Nacionalni inštitut za biologijo, Morska biološka postaja Piran

Matematični modeli razlitja nafte so velikega pomena tako z operativnega kot z znanstvenega stališča. Doslej so bili razviti številni modeli, ki omogočajo različne simulacije. Nekateri upoštevajo samo fizikalne procese, pogosto le kratek čas po razlitju [7], z drugimi je mogoče simulirati tudi kemijske in biološke procese v daljšem časovnem obdobju, od nekaj tednov do nekaj let, npr. Delgado in sod.[2]. Modeli lahko delujejo po Lagrangeovi metodi sledenja delcev – MSD (npr. [2]) ali Eulerjevih metodah, pri katerih obravnavamo naftni madež kot kontinuum [17]. Poznamo tudi modele, ki s pomočjo trajektorij posameznega delca ter perturbacij začetnih pogojev in cirkulacije določajo stopnjo verjetnosti za pojav naftnega madeža na določenem območju [1], prav tako pa se razvijajo modeli, podprti s satelitskimi opazovanji [12]. Ne glede na zasnovo pa vsi modeli širjenja naftnih madežev za simulacije potrebujejo kvalitetne podatke o cirkulaciji vode, te pa zagotovimo s hidrodinamičnimi modeli.

Tudi na Fakulteti za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani že daljši čas razvijamo modele širjenja nafte na morju. Širca [16] je izdelal prvi uporabni tridimenzijski MSD model pri nas, ki ga je Žagar [18] vgradil v hidrodinamični model PCFLOW3D [13]. Izdelani model SIMON je Republiška uprava za zaščito in reševanje RS uporabljala za simulacije po taktičnem in prognostičnem načinu [14]. Model je bil kasneje posodobljen z boljšimi grafičnimi vmesniki [6]. V sodelovanju z NIB ter v okviru EU FP7 projekta »Hydronet« potekajo nadaljnje posodobitve modela NAFTA3, ki smo ga povezali s cirkulacijskimi modeli POM (Princeton Ocean Model) ter ga nadgradili z nekaterimi pomembnimi procesi razgradnje nafte [19].

2 Advekcija in turbulentna difuzija

Za simulacijo razlitja nafte na morju lahko uporabimo hitrostna polja, pridobljena na različne načine. Najstarejši modeli so upoštevali samo empirično določene površinske tokove zaradi vetra, pri čemer naj bi hitrosti na gladini dosegale približno 3 % hitrosti vetra. Tudi globinsko povprečeni dvodimenzijski modeli ne predstavljajo bistvenega napredka, hitrostna polja so še vedno določena semiempirično po enačbi (1).

$$\mathbf{u} = \alpha_w \mathbf{u}_w + \alpha_c \mathbf{u}_c \quad (1)$$

pri čemer \mathbf{u}_w pomeni hitrost vetra 10 m nad morsko gladino, \mathbf{u}_c globinsko povprečno hitrost tokovanja, koeficient vetra α_w znaša 0,03, koeficient tokovanja α_c pa 1,0.

Na polzaprtih območjih, kjer je cirkulacijska slika posledica plimovanja, rezidualnih tokov, pravilnega upoštevanja robnega pogoja na odprtem robu ter prostorsko in časovno spremenljivih vetrovnih polj, pa je mogoče ustrezno cirkulacijsko polje pridobiti le z uporabo tridimenzijskih modelov. Model NAFTA3 uporablja tridimenzionalna nestacionarna hitrostna polja, ki so po potrebi še časovno interpolirana, s čimer dosežemo kar najbolj točno interpretacijo advekcijskega polja. Model smo z vmesniki prilagodili cirkulacijskim modelom PCFLOW3D in različnim verzijam modela POM za območje Tržaškega zaliva, Severnega Jadrana in dela Ligurskega morja v okolici Livorna. Prednost modelov POM je v možnosti upoštevanja večjega števila oceanografskih in predvsem meteoroloških parametrov. Vmesnik pa je zahtevnejši, saj je skalarna in vektorska polja potrebno pretvoriti iz σ - v z-koordinate [19].

V tridimenzijskih modelih po metodi MSD hitrostni vektor v določeni točki prostora običajno razdelimo na advekcijsko komponento \mathbf{u}^* , ki je rezultat hidrodinamičnega modela,

in difuzijsko komponento \mathbf{u}^{**} , ki jo določimo z generacijo naključnih vrednosti, omejena pa je s koeficienti turbulentne difuzije D_h v horizontalni ravnini in D_v v vertikalni smeri. V modelu NAFTA3 difuzijski del hitrosti dalje razdelimo na longitudinalno (u_L^{**}) komponento v smeri vektorja \mathbf{u}^* in transversalno (u_T^{**}) komponento, pravokotno na smer vektorja \mathbf{u}^* . Pri tem predpostavimo, da je v horizontalni ravnini koeficient turbulentne difuzije neodvisen od smeri [16]. Horizontalni komponenti izračunamo po enačbah (2), vertikalno difuzijsko komponento hitrosti w^{**} pa določimo po enačbi (3).

$$u_L^{**} = r_1 \sqrt{2D_h / \Delta t}; \quad u_T^{**} = r_2 \sqrt{2D_h / \Delta t} \quad (2)$$

$$w^{**} = r_3 \sqrt{2D_v / \Delta t} \quad (3)$$

V enačbah je Δt označen časovni korak, vrednosti r_i pa so rezultat generatorja naključnih števil. Srednja vrednost spremenljivk r_i v horizontalni smeri znaša nič, njuna standardna deviacija pa je enaka 1. V vertikalni smeri je upoštevan še vpliv vzgona. Srednjo vrednost naključnih števil v vertikalni smeri določimo po enačbi (4)

$$M_{r_3} = \frac{(\rho_{vode} - \rho_{nafte})}{\rho_{vode}} \quad (4)$$

standardna deviacija pa je enaka 1. Delci se torej zaradi stohastične komponente hitrosti v vertikalni smeri in vzgona v povprečju gibljejo navzgor, kakor to določa razmerje gostot nafte in vode.

V starejših verzijah modela NAFTA so bili horizontalni koeficienti turbulentne difuzije vnaprej predpisani in konstantni v prostoru in času, vertikalni koeficient pa je bil določen po metodi Koutitasa [8]. V vse cirkulacijske modele, s katerimi izračunamo adveksijska polja, so vgrajeni sodobnejši modeli turbulence z več enačbami (Smagorinsky [15], Mellor-Yamada [10]). V modelu NAFTA3 je torej smiselno uporabiti časovno in krajevno spremenljive koeficiente turbulentne difuzije iz cirkulacijskih modelov. Tovrstna izboljšava modela in izdelava ustreznega vmesnika sta v teku. Zavedamo se sicer, da se koeficienti turbulence znatno spremenijo v mešanici vode in nafte, še posebej pa na območjih, kjer je na vodni gladini debelejša plast nafte. Tudi Stokesovi valovi in vetrno valovanje vplivajo na gibanje in širjenje naftega madeža, še posebej pa na emulzifikacijo in disperzijo nafte v vodnem stolpcu. Na manjših polzaprtih območjih, kakršen je tudi Tržaški zaliv, je zaradi kaotičnosti potrebno valovanje modelirati s posebnimi modeli valovanja, saj empirične enačbe ne dajejo ustreznih rezultatov. Emulzifikacija nafte in posledična sprememba parametrov turbulence ter vpliv valovanja na advekcijo in disperzijo nafte so zelo kompleksni procesi, ki jih bomo v model vgradili kasneje.

3 Procesi širjenja in razgradnje nafte

Procese širjenja in razgradnje nafte običajno razdelimo na kratkotrajne in dolgotrajne. Kratkotrajni nastopijo takoj po razlitju, trajajo nekaj ur in so pomembni pri taktičnem načinu modeliranja in delu pristojnih služb, ki poskušajo ob razlitju omejiti širjenje madeža. Dolgotrajni se začnejo po določenem času (nekaj urah do nekaj dneh) in lahko trajajo tudi

več let. Ti so manj pomembni za omejevanje razsežnosti nezgode in jih pri taktičnem načinu modeliranja ni potrebno upoštevati.

Najpomembnejša procesa, ki nastopita takoj po razlitju, sta mehansko širjenje in izhlapevanje nafte in ju upošteva večina modelov. V dvodimenzijskih modelih se mehansko širjenje upošteva po Fayeveh enačbah [4]. V tridimenzijskih modelih, ki delujejo po MSD, mehanskega širjenja ne računamo posebej, saj se nafta ustrezno širi že zaradi same metode in upoštevania strižne difuzije, ki izvira iz cirkulacijskega modela [3]. Za izhlapevanje je mogoče uporabiti več enačb, najbolj znani sta enačbi Mackaya [9] in Fingasa [5]. V modelu NAFTA3 je, podobno kot v večini drugih operativnih modelov, trenutno upoštevana Mackayeva enačba. Glede na velikost Tržaškega zaliva lahko med kratkotrajne procese uvrstimo tudi odlaganje na in sproščanje z obale. V modelu NAFTA3 delec, ki se dotakne obale, tam obmiruje dokler ga vpliv advekcije ali turbulentne difuzije ne »vrne« v vodo.

Med dolgotrajne procese uvrščamo emulzifikacijo, disperzijo v vodnem stolpcu, spremembo gostote zaradi izhlapevanja, emulzifikacije in fotodegradacije, mešanje nafte s sedimentom in biodegradacijo. Vsi naštetih procesi so za ukrepanje ob razlitju nafte manj pomembni, v modelu NAFTA3 jih trenutno upoštevamo zgolj kvalitativno, po splošno veljavnih enačbah, ki so opisane tudi v [2]. Izpopolnitve modela NAFTA3 s kvantifikacijo in upoštevanjem medsebojnih vplivov posameznih procesov so v teku.

4 Praktični primer: razlitje in širjenje nafte v Tržaškem zalivu

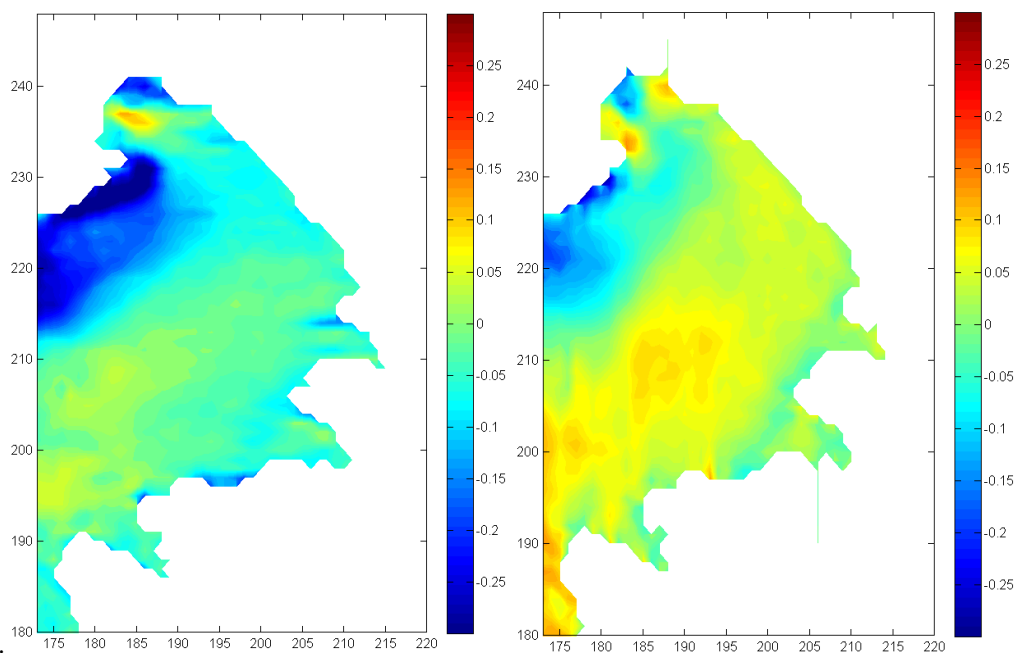
Za verifikacijo in validacijo modela v naravnem okolju ni pravih možnosti, dokler se na nekem območju ne zgodi razlitje, saj meritev ni mogoče opraviti z drugimi snovmi. Na obravnavanem območju dovolj velika razlitja, na osnovi katerih bi bilo možno izvesti vsaj približno validacijo modela, ni so bila zabeležena. Za manjša razlitja pa niso bile izvedene ustrezne meritve količine, porazdelitve in lastnosti razlite nafte. Kot večina modelov širjenja nafte, je zato tudi model NAFTA3 v uporabi brez rigoroznih postopkov preverjanja, ki se zahtevajo pri drugih modelih prenosa snovi.

4.1 Podatki

V prikazani študiji obravnavamo Tržaški zaliv. Cirkulacija je bila izračunana z modelom TSPOM za dejansko tridnevno vremensko situacijo med 19. in 21. marcem 2009. V tem času sta se zgodila dva obrata vetra (jugo – burja – jugo) in povečan pretok Soče. Model TSPOM je bil pri tem enosmerno gnezden v modelu NAPOM, ki je za isti čas izračunal hitrostno polje na območju Severnega Jadrana. Resolucija numerične mreže Tržaškega zaliva v horizontalni smeri znaša ca. 140 x 150 m, v vertikalni smeri je domena razdeljena na 11 σ -slojev. Poleg robnega pogoja na odprtem robu so bili kot vsiljevanja upoštevani še veter (izračunan na MOP-ARSO z modelom Aladin za isto obdobje) in klimatološki pretoki Soče, Dragonje, Rižane in Badaševce.

Tridimenzionalna hitrostna polja modela TSPOM so bila z izdelanim vmesnikom pretvorjena v vhodne podatke modela NAFTA3. Slednji ima v horizontalni ravnini enako resolucijo numerične mreže kot model TSPOM, v vertikalni smeri pa je računska domena razdeljena na 13 z-slojev. Debeline slojev znašajo od 30 cm na gladini do 5 m ob dnu. V numerični mreži modela NAFTA3 se med računom izvajajo 3-D interpolacije hitrosti na točne koordinate obravnavanih delcev, v posamezni celici numerične mreže pa se iz mase delcev izračunajo tudi koncentracije.

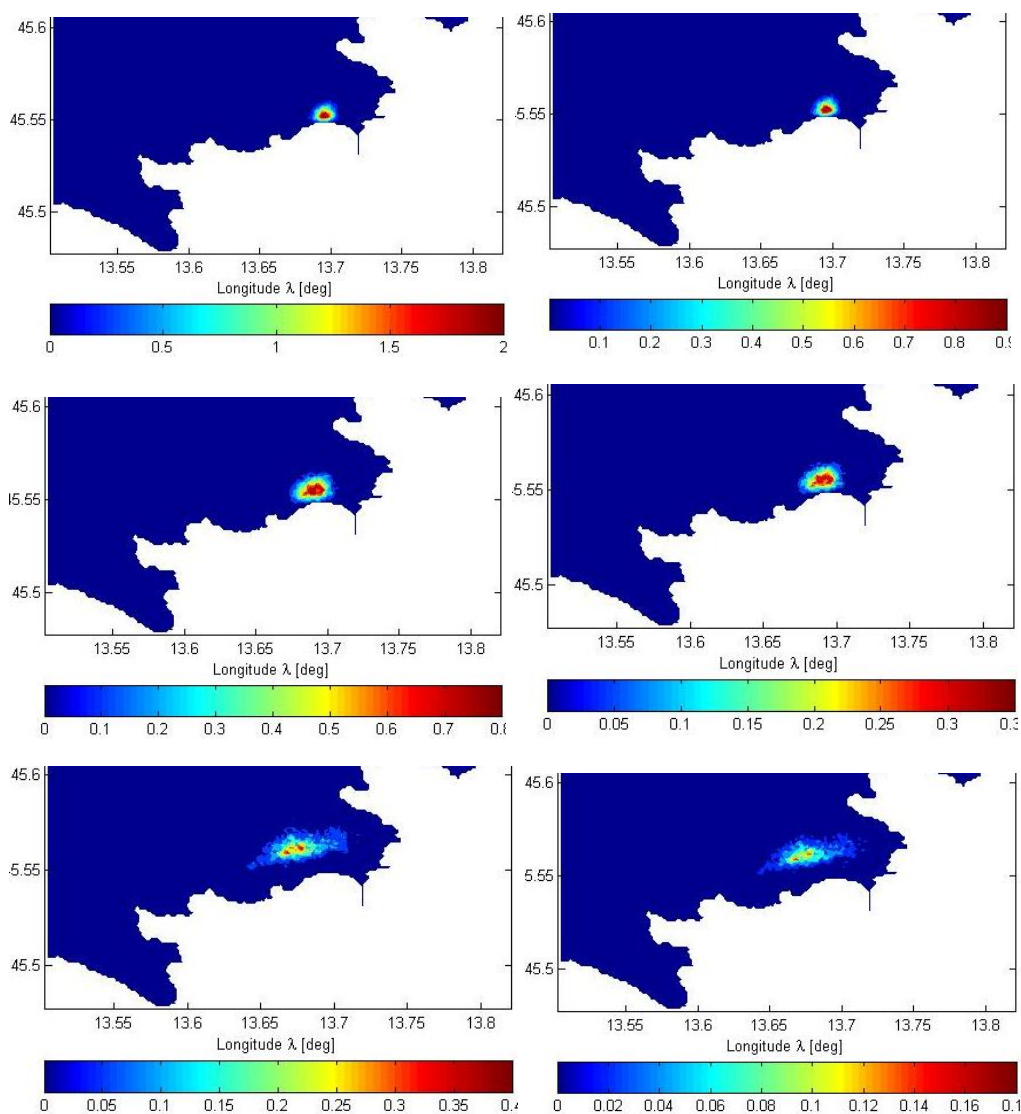
Izvedeni in prikazani sta dve simulaciji: pri prvi izhlapevanja lahkih frakcij nafte ne upoštevamo, pri drugi pa predpostavimo, da se je razlilo lahko kurilno olje, ki sodi med derivate z največjim koeficientom izhlapevanja. V prvem primeru smo tako pri morebitnem posredovanju, ki se mora zgoditi najkasneje v nekaj urah, na varni strani glede količine razlite nafte. Drugi primer je pomembnejši v daljšem času, ko posredovanje ni več možno, neupoštevanje izhlapevanja pa v tem primeru vodi k precenjevanju možnih posledic razlitja. Lokacija nezgode je v obeh primerih ista ($\Phi=45.55^\circ$, $\lambda=13.7^\circ$), prav tako količina in čas trajanja razlitja, ki znašata 500 t in 5 h, celotni volumen razlite nafte pa smo ponazorili z 10.000 delci. Večje število delcev vodi k bolj »gladkim« rezultatom, saj je tako prispevek posameznega delca h koncentraciji v računski celici manjši, vendar pa se z večanjem števila delcev močno povečuje tudi računski čas modela. Pri taktičnem modeliranju, ko želimo izvesti simulacijo čim prej, je računski čas modela lahko zelo pomemben, zato takrat izvajamo simulacije z manj delci (1000 – 5000), če pa nismo omejeni z računskim časom, običajno število delcev dosega nekaj deset do sto tisoč.



Slika 1: Hitrosti v površinskem sloju 19. 3. 2009 ob 15:00 UTC: levo komponenta u , desno komponenta v [m/s].

4.2 Rezultati in razprava

Za širjenje nafte so najpomembnejše razmere na gladini, saj kratkoročno večina nafte ostane na ali tik pod gladino. Na sliki 1 sta prikazani hitrostni komponenti u in v v površinskem sloju. Pretvorba rezultatov modela TSPOM v vhodne podatke modela NAFTA je zadovoljivo točna za simulacije širjenja nafte, odstopanja hitrosti v površinskem sloju so minimalna [19]. Izvedeni sta bili simulaciji trajanja 72 h, korak računa pri metodi sledenja delcev znaša 6 minut, rezultate pa smo izrisali vsakih 5 h.



Slika 2: Koncentracije nafte v površinskem sloju debeline 30 cm; levo primer brez izhlapevanja, desno z upoštevanjem izhlapevanja, v časih 10, 20 in 40 h. Koncentracije so podane v kg/m^3 .

Na sliki 2 so prikazane koncentracije nafte v površinskem sloju debeline 30 cm pri obeh izvedenih simulacijah. Opazna je razmeroma velika razlika v koncentracijah med obema simulacijama, ki se veča s časom. Maksimalne koncentracije so, če izhlapevanja ne upoštevamo, v istem času dva- do trikrat višje pri približno enaki površini madeža. Kemična sestava vseh delcev je enaka. Delci torej ne morejo izhlapeti v celoti, zato je površina naftnega madeža skoraj enaka pri obeh simulacijah.

V tabeli 1 je prikazana skupna količina nafte in odstotek izhlapevanja v nekaterih časih računa. Že po prvih petih urah (ko se izlivanje konča) izhlapi skoraj polovica razlite nafte, madež pa zavzame površino $2,6 \times 10^6$ m². Pri tako hitrem širjenju madeža, h kateremu prispeva majhna viskoznost izbranega derivata in precej močan veter, je še posebej pomembno, da se ukrepi za preprečevanje širjenja madeža začnejo izvajati čim hitreje.

Tabela 1: Površina madeža, preostala količina nafte in odstotek izhlapevanja

Čas [h]	Površina madeža [1000 m ²]	Količina razlite nafte [t]	Količina preostale nafte [t]	Odstotek izhlapele nafte [%]
1	427,5	100	66,45	33,5
2	999,1	200	117,7	41,2
3	1485	300	164,9	45,0
5	2653	500	255,9	49,9
10	5667	500	229,9	54,0
20	12723	500	214,1	57,2
40	34044	500	187,5	62,5
70	71067	500	160,8	67,9

5 Zaključki

Izdelani model NAFTA3 omogoča simulacije širjenja nafte na morju v razmeroma gosti numerični mreži z nestacionarnimi vrednostmi hidrodinamičnih spremenljivk. Slednje lahko pridobimo s cirkulacijskima modeloma PCFLOW3D in TSPOM/NAPOM. Ko bodo na voljo vsakodnevne napovedi stanja morja z modeloma TSPOM/NAPOM, ki so v razvojno-testni fazi na NIB-MBP, bo mogoče model NAFTA3 uporabljati v (skoraj) realnem času. V modelu upoštevamo mehansko širjenje in izhlapevanje nafte, na kvalitativni ravni pa tudi emulzifikacijo in disperzijo v vodnem stolpcu. Model nadgrajujemo z drugimi pomembnimi procesi, ki vplivajo na potovanje, širjenje in razgradnjo naftnih madežev ter dogajanje ob stiku nafte z obalo. Najpomembnejša mehanizma sta nedvomno advekcija in turbulentna difuzija, zato dajemo prednost izboljšavam teh dveh mehanizmov širjenja nafte.

Zahvala. Razvoj modela in simulacije je omogočilo sodelovanje pri projektu 7. Okvirnega programa FP7/2007-2013 Hydronet (pogodba 212790), v programski skupini P2-0180 Hidrotehnika, hidravlika in geotehnika ter strokovni nalogi Nafta3d po pogodbi 1439/2009 med NIB in UL-FGG.

Literatura

- [1] Beegle-Krause, C., 2001. General NOAA Oil Modeling Environment (GNOME): A New Spill Trajectory Model. Proc. International Oil Spill Conf., Mar. 2001., 865-872.

- [2] Delgado, L., Kumzerova E, Martynov, M., 2006. Simulation of oil spill behaviour and response operations in PISCES. WIT Transactions on Ecology and the Environment 88, 279-292.
- [3] Elliott, A., Hurford, N., Penn, C, 1986. Shear diffusion and the spreading of oil slicks.. Marine Pollution Bulletin 17, 308-313.
- [4] Fay, J., 1971. Physical Processes in the Spread of Oil on Water Surface. Proc. of the Joint Conf. on Prevention and Control of Oil Spills, Amer. Petroleum Institute, Washington, D.C., 463-468.
- [5] Fingas, M., 2004. Modeling evaporation using models that are not boundary-layer regulated. Journal of Hazardous Materials 107, 27-36.
- [6] Galuf, S., 2005. Simulacija razlitja nafte v Tržaškem zalivu. Diplomaska naloga. UL-FGG Ljubljana, 71 str.
- [7] Howlett, E., Jayko, K., Isaji, T., Anid, P., Mocke, G., Smit, F., 2008. Marine Forecasting and Oil Spill Modeling in Dubai and the Gulf Region. COPEDEC Proceedings, 1-12.
- [8] Koutitas, C., O'Connor, B., 1980. Modeling three-dimensional wind induced flows. Journal of the Hydraulics Division 106, 1843-1865.
- [9] Mackay, D., Patterson, S., Nadeau, S, 1980. Calculation of the Evaporation Rate of Volatile Liquids. Proc. of the National Conference on Control of Hazardous Material Spills, Louisville, Kentucky, 361-368.
- [10] Mellor G.L., Yamada, T., 1982. Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems. Rev. Geophys. Space Phys. 4, 851-875.
- [11] MOP, 2008. Poročilo o čezmejnih vplivih na okolje za kopenski terminal za uplinjanje utekočinjenega zemeljskega plina v Žavljah. MOP - Ministrstvo za okolje in prostor, Republika Slovenija, Ljubljana, 190.
- [12] Perkovic, M., Delgado, L., David, M., Petelin, S., Harsh, R., 2008. The Necessity of Applying Sar Imagery to Oil Spill Modeling in Cases of Data Obfuscation, in: Davidson, W.F., Lee, K., Cogswell, A. (Eds.), Oil Spill Response: A Global Perspective. Springer Netherlands, pp. 237-256.
- [13] Rajar, R., Četina, M., Širca, A., 1997. Hydrodynamic and water quality modelling: case studies. Ecological Modelling 101, 209-228.
- [14] Rajar, R., Četina, M., Žagar, D., Širca, A., Steinman, F., 1994. Matematični model za simulacijo širjenja nafte in procesov ob razlitju polutantov v površinskih vodah. Del. 1, Tridimenzionalni model za simulacijo širjenja nafte in polutantov v morju in jezerih. Poročilo FAGG, Oddelek za gradbeništvo in geodezijo, Laboratorij za mehaniko tekočin, 32.
- [15] Smagorinsky, J., 1963. General Circulation experiments with the primitive equations I. The basic experiment. Monthly Weather Review 91, 99-164.
- [16] Širca, A., 1992. Modeliranje transporta polutantov po metodi sledenja delcev. Magistrska naloga, Univerza v Ljubljani - FAGG.
- [17] Tkalič, P., 2006. A CFD solution of oil spill problems. Environmental Modelling & Software 21, 271-282.
- [18] Žagar, D., 1994. Tridimenzijski model za simulacijo širjenja nafte. Magistrska naloga, Univerza v Ljubljani - FAGG.
- [19] Žagar, D., Četina, M., 2011. Končno poročilo o izdelavi strokovne naloge NAFTA3d. Poročilo UL-FGG Ljubljana, Katedra za mehaniko tekočin, 22 str.

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana
531(082)

KUHLJEVI dnevi (2011 ; Mengeš)

Zbornik / Kuhljevi dnevi 2011, Mengeš, 22. september 2011 ;
uredila Matjaž Eberlinc, Brane Širok. - Mengeš: Slovensko društvo
za mehaniko, 2011

ISBN 978-961-91659-6-6

1. Eberlinc, Matjaž
257527552